D.S. Analyse Numérique
ISIMA 1ère Année – Session de septembre 2012

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

30 septembre 2012

Exercice 1 Soit a, b et c des constantes positives. Déterminer la valeur minimale de la somme de trois nombres positifs x, y et z sous la contrainte

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$$

par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On suppose que les contraintes de positivité des variables ne sont pas actives.

Exercice 2 Etant donnée une matrice $A(m\times n)$, on veut construire une matrice $M(m\times m)$ telle que

- $MA=S$, où S est triangulaire supérieure $(m\times n)$
- $MM^T=\Delta^2$, où $\Delta=\text{Diag}\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$ avec $\delta_i\neq 0, i=1,\dots,m$

1. Montrer que le calcul de M permet d'obtenir la factorisation QR de A et que $Q=M^T\Delta^{-1}$, $R=\Delta^{-1}S$
2. Analysons le cas $m=2$: soient $x\in\mathbb{R}^2$ et $\Delta=\text{Diag}\{\delta_1,\delta_2\}$ $(\delta_i\neq 0)$ donnés.
   (a) On définit
   $$M_1=\begin{bmatrix}\beta_1 & 1\\ 1 & \alpha_1\end{bmatrix}$$
   Supposer $x_2\neq 0$ et calculer M_1x et $M_1\Delta^2M_1^T$.
   Comment choisir α_1 et β_1 de façon à ce que la deuxième composante de M_1x soit nulle et que $M_1\Delta^2M_1^T$ soit diagonale ?
   Pour le choix précédent, déterminer γ_1 tel que
   $$M_1x=\begin{bmatrix}(1+\gamma_1)x_2\\ 0\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad M_1\Delta^2M_1^T=\begin{bmatrix}(1+\gamma_1)d_2^2 & 0\\ 0 & (1+\gamma_1)d_1^2\end{bmatrix}$$
   (b) Supposer $x_1\neq 0$; on définit
   $$M_2=\begin{bmatrix}1 & \alpha_2\\ \beta_2 & 1\end{bmatrix}$$
   Choisir α_2 et β_2 de façon à ce que
   $$M_2x=\begin{bmatrix}(1+\gamma_2)x_1\\ 0\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad M_2\Delta^2M_2^T=\begin{bmatrix}(1+\gamma_2)d_1^2 & 0\\ 0 & (1+\gamma_2)d_2^2\end{bmatrix}$$
   et déterminer γ_2.
3. Soit maintenant m un entier quelconque ; définir les matrices $M_1(p,q)$ et $M_2(p,q)$ telles que
   $$\begin{bmatrix}m_{pp} & m_{pq}\\ m_{qp} & m_{qq}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1 & 1\\ 1 & \alpha_1\end{bmatrix}\quad\text{ou}\quad=\begin{bmatrix}1 & \alpha_2\\ \beta_2 & 1\end{bmatrix}$$
   la composante q de $M_i(p,q)x$ est nulle

   $M_i\Delta^2M_i^T$ diagonale

Les matrices M_i sont appelées *matrices de Givens rapide*. On résume ci-dessous l'algorithme de Givens rapide :

$d_i = 1, i = 1, \dots m$
Pour $p = 1, \dots \min\{n, m-1\}$ **Faire**
Pour $q = p+1, \dots m$ **Faire**
Si $a_{pq} \neq 0$ **Alors**

$$\alpha = -a_{pp}/a_{qp}, \quad \beta = -\alpha d_q/d_p, \quad \gamma = -\alpha\beta$$

Fin Si
Si $\gamma \leq 1$ **Alors**

$$\begin{bmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{bmatrix}$$

$d_p \leftarrow (1 + \gamma d_p)$
$d_q \leftarrow (1 + \gamma d_q)$
Sinon
échanger α et β

$$\alpha = 1/\alpha, \quad \beta = 1/\beta, \quad \gamma = 1/\gamma$$

$$\begin{bmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{bmatrix}$$

$d_p \leftarrow (1 + \gamma d_p)$
$d_q \leftarrow (1 + \gamma d_q)$
Fin Si
Fin Pour
Fin Pour

4. Justifier l'algorithme et donner son coût en nombre de flops. Comparer avec la méthode de Householder vue en cours.
5. Application numérique : résoudre au sens des moindres carrés par la méthode de Givens rapide le syst ème ~~incompatible~~ $Ax = b$ avec

a_{pp} a_{pq}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a_{qp} a_{qq}