D.S. Analyse Numérique
ISIMA 1ère Année – Session de novembre 2010

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

25 novembre 2010

Exercice 1 Soient les points de coordonnées $(0,6)$, $(1,0)$ et $(2,0)$. On souhaite définir la droite $\mathcal{D}$ passant au mieux par ces trois points, au sens des moindres carrés.

1. Former le système linéaire $Ax = b$ modélisant ce problème.
2. Trouver l'équation de $\mathcal{D}$.
3. Vérifier que $e = Ax - b$ est orthogonal à $\mathrm{Im}(A)$, et justifier ce résultat dans le cas général.

Exercice 2 Soit M une matrice $m \times n$ non nulle et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} M^T \\ b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & b \end{pmatrix}$$

1. Donner A sous sa forme matricielle
2. Supposons que $rang(M) = n$; montrer que A est singulière si et seulement si $b \in Im(M)$.
3. On considère le cas $b \notin Im(M)$. Soit R_A une matrice triangulaire supérieure vérifiant

$$R_A^T R_A = A, \quad \text{où } R_A = \begin{pmatrix} R & z \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

   et R est triangulaire supérieure et inversible. Soit x un vecteur qui minimise $\| b - Mx \|_2^2$, où $\|.\|_2$ représente la norme Euclidienne dans $\mathbb{R}^m$. Montrer que x vérifie $Rx = z$ et que la norme du résidu optimal vérifie $\| b - Mx \|_2 = |\gamma|$.
   Indication : R_A peut être construite à partir de la factorisation QR de la matrice $[Mb]$.

Exercice 3 Soit le système

$$\begin{bmatrix} A_1 & B^T \\ B & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

où
- A_1, A_2 et B sont des matrices $n \times n$ avec A_1 et $A_2 - BA_1^{-1}B^T$ inversibles ;
- x_1, x_2, b_1 et b_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On pose $K = \begin{bmatrix} A_1 & B^T \\ B & A_2 \end{bmatrix}$.
On cherche à construire une adaptation par blocs de la méthode de Gauss, c'est-à-dire à transformer le système (1) en un système triangulaire par blocs (système dont le bloc inférieur gauche est la matrice nulle).

1. En appliquant la méthode du pivot de Gauss à (1), avec A_1 comme pivot, montrer qu'on obtient le système triangulaire supérieur par blocs

$$\begin{bmatrix} A_1 & B^T \\ 0 & A_2 - BA_1^{-1}B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - BA_1^{-1}b_1 \end{bmatrix}.$$

   En déduire la factorisation LU par blocs de K.
2. On pose

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & E^T \\ E & C_2 \end{bmatrix}$$

En utilisant l'élimination de Gauss par blocs sur les systèmes (I désigne la matrice identité $n \times n$)

$$K \begin{bmatrix} C_1 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \quad K \begin{bmatrix} E^T \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

montrer que

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1^{-1} + A_1^{-1} B^T \left(A_2 - B A_1^{-1} B^T\right)^{-1} B A_1^{-1} \\ E &= -\left(A_2 - B A_1^{-1} B^T\right)^{-1} B A_1^{-1} \\ C_2 &= \left(A_2 - B A_1^{-1} B^T\right)^{-1} \end{aligned}$$