Examen d'Analyse Numérique

1ère année ISIMA - 31-01-2006

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

Durée : 2 heures - Documents autorisés : cours, TD et TP de l'année - Calculatrices programmables interdites

Exercice 1 Soit le problème d'optimisation avec contrainte

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

On notera $V = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 1\}$ et $M = \{d \in \mathbb{R}^2 \,|\, d_1 + d_2 = 0\}$.

1. Donner la résolution graphique de ce problème d'optimisation sous contraintes affines. Pour cela, on déterminera la nature de la fonction objectif f, ses points stationnaires et ses courbes de niveaux dans $\mathbb{R}^2$, et on justifiera soigneusement l'optimalité de la solution trouvée, notée x^*.

2. Retouver le résultat obtenu en 1. en utilisant les conditions d'optimalité du 1er ordre (pour un minimum avec contraintes). On notera λ^* le multiplicateur de Lagrange correspondant.

3. Soit $\bar{x} = [0\ 1]^T$ un point de V en lequel on calcule la direction $\bar{d} = -\text{Proj}_M \nabla f(\bar{x})$, où Proj_M représente l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace M.

3.a Montrer que $\bar{d}$ est une direction de descente pour f en $\bar{x}$.

3.b Montrer que, pour tout réel t, $x = \bar{x} + t\bar{d} \in V$ et déterminer $\bar{t} \geq 0$ qui minimise la fonction $\theta(t) = f(\bar{x} + t\bar{d})$. Quel point de V obtient-on ?

3.c La stratégie de descente décrite en a et b permet-elle d'obtenir la solution de (P) dans le cas où la dimension de V est supérieure à 1 ?

Exercice 2 : décomposition en valeurs singulières

Soit A une matrice à n lignes, m colonnes à coefficients réels, de rang m, $n > m$ A^TA est donc une matrice symétrique ayant m valeurs propres λ_k que l'on supposera ordonnées selon $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_m > 0$.

On appelle valeurs singulières de A les réels $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad 1 \leq k \leq m$.

1. Montrer que $\|A\|_2 = \sigma_1$.
2. A tout vecteur propre v_k de A^TA, relatif à $\lambda_k > 0$, on associe
$$u_k = \frac{Av_k}{\sigma_k}$$
Montrer que l'on peut construire avec ces vecteurs deux matrices carrées U et V, de taille respective n et m, telles que
$$U^TAV = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2 & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \sigma_m \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$
3. Vérifier que U et V sont orthogonales
4. Montrer que
$$A = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i u_i v_i^T$$

5. Application numérique :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les v_i, les σ_i, les u_i.