# EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE

Alex Aussem, Jonas Koko et T.Q. Phong

Décembre 2001

**Exercice I.**

Dans de nombreux problèmes de moindres carrés, en particulier en statistique, on cherche un (petit) sous-ensemble $J$ d'indices contenus dans $1, \ldots, n$, tel que le solution $x_J$ du problème :

$$\{\mathrm{I}nf \|\mathbf{A}x - b\|_2 ; x_j = 0 \ \ pour \ \ j \notin J\}.$$

ait un résidu d'erreur inférieur à un seuil donné. L'exercice suivant vise à établir des formules qui permettent de calculer la variation du résidu d'erreur si on restreint le problème initial à l'ensemble $J$.

Soient $\mathbf{A}_1$ une matrice de format (n,p), $\mathbf{A}_2$ une matrice de format (n,q), $x_1$ un vecteur de dimension $p$, et $x_2$ un vecteur de dimension $q$. On suppose que le rang de $\mathbf{A}_1$ vaut $p$.

On pose : $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ **et** $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. On se donne un vecteur $b$ de dimension $n$.

1. A quelle condition le système $\mathbf{A}x = b$ est-il compatible ?
2. Donner une CNS pour que $x$ réalise le minimum de $E(x) = \|\mathbf{A}x - b\|_2^2$. A quelle condition la solution des moindres carrés est-elle unique ?
3. Soit $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ une solution des moindres carrés de $\|\mathbf{A}x - b\|_2^2$. Exprimer $\bar{x}_1$ en fonction de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, b et $\bar{x}_2$.
4. En déduire la relation $\mathbf{A}_2^t \mathbf{K}_1 (\mathbf{A}_2 \bar{x}_2 - b) = 0$ ou $\mathbf{K}_1$ est une matrice à déterminer en fonction de $\mathbf{A}_1$.
5. A quelle apllication correspond la matrice $\mathbf{K}_1$ ?
6. Soit $\tilde{x}_1$ la solution des moindres carrés de $\|\mathbf{A}_1 \tilde{x}_1 - b\|_2^2$. On pose $\bar{m} = \|\mathbf{A}\bar{x} - b\|_2^2$ et $\tilde{m} = \|\mathbf{A}_1 \tilde{x}_1 - b\|_2^2$. Montrer que
$$\tilde{m} - \bar{m} = b^t \mathbf{K}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x}_2$$
7. Application numérique. Déterminer $\tilde{m}, \bar{m}, \bar{x}, \tilde{x}_1, \mathbf{K}_1$ avec :
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Exercice II.**

On se donne : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. Trouver une matrice de permutation, $\mathbf{P}$, et deux matrices triangulaires $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ telles que $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$. On utilisera la stratégie du pivot partiel (i.e. recherche du plus grand terme en valeur absolu sous la colonne).
2. En déduire l'inverse de $\mathbf{A}$.