Examen de Mathématiques
1ère année ISIMA

03 Février 2003

Durée 2 heures – Documents autorisés

Exercice 1 1.– Déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}, \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

2.– Montrer que la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

est convergente et calculer sa limite quand $n \mapsto +\infty$.

Exercice 2 1.– Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$$

2.– A l'aide d'un développement limité à l'ordre 2, montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} x \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} \right] = -e^2$$

Exercice 3 Soit (p, q) un couple d'entiers naturels non nuls. On définit

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(x,y) &= \frac{x^p y}{x^2 - xy + y^2}. \end{aligned}$$

Déterminer pour quelles valeurs de p,

1.– f est continue ;

2.– les dérivées partielles de f existent, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

3.– les dérivées partielles de f sont continues, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x.$$

1.– Calculer I_0 et I_1.

2.– A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

En déduire I_3 et I_4.