Examen de Mathématiques
ISIMA 1ère année

02 février 2004

Documents autorisés : notes de cours

Exercice 1 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{aligned} u_0 &= a > 0, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}(1 + u_n^2), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

En supposant que u_n converge, calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \quad n \geq 1.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 3 Soit la fonction f, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{xy^2}{\sin(x^2+y^2)}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Etudier la continuité et l'existence des dérivées partielles de f. La fonction f est–elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4 A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$I_n = \int \frac{\ln x}{x^n} dx, \quad n \geq 1.$$

Exercice 5 En utilisant la règle de l'Hospital, calculer

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}.$$