D.S. Analyse Numérique
ISIMA 1ère Année – Session de février 2011

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

1 février 2011

Exercice 1 Soient A une matrice carrée de taille n symétrique, définie positive, $u \in \mathbb{R}^n$ le vecteur tel que $u_i = 1, 1 \leq i \leq n$, et $e \in \mathbb{R}^n$ tel que $0 < e_1 < e_2 \cdots < e_n$.
Pour $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$ on définit

$$\begin{aligned} C_1(\epsilon) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n, u^T x = 1 \text{ et } e^T x = \epsilon \right\} \\ C_2(\sigma) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n, u^T x = 1 \text{ et } \frac{1}{2} x^T A x = \sigma \right\} \end{aligned}$$

On cherche à résoudre les problèmes

$$\min_{x \in C_1(\epsilon)} \frac{1}{2} x^T A x \tag{1}$$

et

$$\max_{x \in C_2(\sigma)} e^T x \tag{2}$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_1 = \frac{e_n - \epsilon}{e_n - e_1}, y_n = \frac{\epsilon - e_1}{e_n - e_1}$ et $y_2 = \cdots = y_{n-1} = 0$. Montrer que $y \in C_1(\epsilon)$
2. On note λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $u^T x = 1$ et μ celui associé à la contrainte $e^T x = \epsilon$.
   On note alors $\begin{array}{ll} a = u^T A^{-1} u & b = e^T A^{-1} u \\ c = e^T A^{-1} e & d = b^2 - ac \end{array}$ En utilisant les conditions d'optimalité associées à $C_1(\epsilon)$, montrer que la solution du problème (1) vérifie
   $$\begin{aligned} \lambda &= (c - b\epsilon)/d \\ \mu &= (a\epsilon - b)/d \\ x &= -A^{-1}(\lambda u + \mu e) \end{aligned}$$
3. On dit que x est efficiente si x est solution commune aux problèmes (1) et (2). On appelle frontière d'efficience la courbe du plan (ϵ, σ)correspondant à l'ensemble de ces solutions lorsque ϵ et σ varient. Déterminer cette frontière. (*Indication : vous pourrez poser* $\sigma = \frac{1}{2} x^T A x$ *et utiliser la question précédente pour déterminer* Ax)

Exercice 2 Soit A une matrice de taille $n \times n$, de coefficients (a_{ij}) pour $i, j \in \{1, n\}$. On pose $R_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$

1. Soient u un vecteur propre de A de valeur propre λ. En utilisant une ligne de l'équation $A\ u = \lambda\ u$, montrer qu'il existe un disque de Gershgörin contenant λ.

2. En déduire une borne sur le rayon spectral de A, fonction des éléments diagonaux et des R_k. Quelle est la complexité arithmétique du calcul de cette borne ?

3. Applications numériques :
   Soit la matrice A suivante :
   $$\begin{bmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{bmatrix}$$
   Dessiner les disques de Gershgörin de A, puis ceux de A^T.
   En déduire une majoration du rayon spectral de A.

Exercice 3 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Calculer A^n.
3. On considère maintenant la suite réelle (u_n) définie par

$$u_n = \frac{4u_n + 4}{u_n + 6}, \quad u_o \in \mathbb{R}.$$

   (a) Trouver deux suites v_n et w_n telles que

$$u_n = \frac{v_n}{w_n} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix},$$

   avec v_0 et w_0 à déterminer.

   (b) Exprimer u_n en fonction de u_0.