# D.S. Analyse Numérique - ISIMA 1ère Année

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

Mercredi 6 février 2008

**Exercice 1** Soient $A$ une matrice symétrique définie positive de taille $n$, $u \in \mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1, et $e$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Pour $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$ donnés, on définit les ensembles

$$C_1(\epsilon) = \left\{x \in \mathbb{R}^n, u^T x = 1, e^T x = \epsilon\right\}, \qquad C_2(\sigma) = \left\{x \in \mathbb{R}^n, u^T x = 1, \frac{1}{2} x^T A x = \sigma\right\}$$

Dans la suite, on cherche à résoudre les problèmes

$$\min_{x \in C_1(\epsilon)} \frac{1}{2} x^T A x \tag{1}$$

$$\max_{x \in C_2(\sigma)} e^T x \tag{2}$$

1. Donner les conditions sur $e$ et $\epsilon$ pour que $C_1(\epsilon)$ soit non vide.
   On admet par ailleurs que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, $C_1(\epsilon)$ est fermé et non borné. On en déduit que le problème (1) admet une solution unique. De même, on admet que pour certaines valeurs de $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $C_2(\sigma)$ est non vide, fermé et borné, de sorte que (2) admet au moins une solution.
2. On note $\lambda$ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $u^T x = 1$, et $\mu$ celui associé à $e^T x = \epsilon$. On définit
   $$a = (A^{-1}u)^T u, \quad b = (A^{-1}u)^T e, \quad c = (A^{-1}e)^T e, \quad d = b^2 - ac$$
   En utilisant les conditions d'optimalité associées à $C_1(\epsilon)$, montrer que la solution de (1) vérifie
   $$\begin{aligned} \lambda &= (c - b\epsilon)/d \\ \mu &= (a\epsilon - b)/d \\ x &= -A^{-1}(\lambda u + \mu e) \end{aligned}$$
   On s'attachera en particulier à montrer que $d$ est non nul.
3. On dit qu'une solution $x$ est efficiente si elle est solution commune aux problèmes (1) et (2), et on appelle frontière d'efficience la courbe du plan $(\epsilon, \sigma)$ correspondant à l'ensemble de ces solutions, lorsque $\epsilon$ et $\sigma$ varient. Pour $x$ efficient, exprimer $\frac{1}{2} x^T A x$ en fonction de $\lambda, \mu, \epsilon$. En déduire une expression de $\sigma$ en fonction de $a, b, c$ et $\epsilon$. Quelle est la courbe ainsi obtenue dans le plan $(\epsilon, \sigma)$ ?

**Exercice 2** Soit $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ une matrice diagonale. Soit $\rho$ un réel positif et $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\| x \|_2 = 1$. On considère la matrice $A = D + \rho x x^T$.

1. Montrer que chaque composante $v_i$ d'un vecteur propre $v$ de $A$ associée à la valeur propre $\lambda$ vérifie
   $$v_i = \rho \frac{a x_i}{\lambda - d_i}$$
   où $a = x^T v$.
2. Montrer que les valeurs propres de $A$ vérifient l'équation $\rho \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\lambda - d_i} - 1 = 0$.

**Exercice 3** Soit $f$ la fonction quadratique

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$$

1. Quel est l'ensemble des points stationnaires de $f$ ? Quelle est leur nature ?
2. En partant du point $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, on souhaite trouver $x_1 = x_0 + t_0 d_0$ en appliquant une itération de la méthode du gradient. Donner $d_0, t_0, x_1$.