

# Examen d'Analyse Numérique

## 1ère année ISIMA - Vendredi 29 janvier 2010

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

*Durée : 2 heures*

*Documents autorisés : cours, TD et TP de l'année.*

**Exercice 1** Soit  $x$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $P$  la matrice  $(n \times n)$  dont tous les éléments sont nuls sauf :

$$P_{j,j+1} = 1, j = 1, \dots, n-1, \text{ et } P_{n,1} = 1$$

1. Montrer que  $P$  effectue une permutation circulaire des composantes de  $x$ .
2. A partir de la remarque de la question 1, calculer  $P^2, P^3, \dots, P^{n-1}$ .  
Que vaut  $P^n$  ?
3. Que représente  $P^T$  ? Montrer que  $P$  est une matrice orthogonale.  
Pour  $k \in \{1..n\}$ , calculer  $(P^k)^{-1}$ .
4. Déterminer les valeurs propres de  $P$  à partir du résultat de la question 2.
5. Montrer que le vecteur  $x^{(k)}$  dont les  $n$  composantes sont  $e^{2i\pi \frac{kj}{n}}, j = 1, \dots, n$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $e^{2i\pi \frac{k}{n}}$ , pour  $k = 0, \dots, n-1$ .
6. On considère la matrice  $M = h_0I + h_1P + h_2P^2 + \dots + h_{n-1}P^{n-1}$ , les  $h_0, \dots, h_{n-1}$  étant des constantes réelles ou complexes.
  - (a) Montrer que les lignes de cette matrice se déduisent les unes des autres par permutation circulaire.
  - (b) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $M$

*Indication* : on utilisera la matrice de passage  $F$  qui diagonalise  $P$

**Exercice 2** Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

1. A l'aide du théorème de Gerhsgorin, donner une localisation des valeurs propres de  $A$ .
2. Donner une condition suffisante sur  $\alpha$  pour que la matrice  $A$  soit semi-définie positive. Idem dans le cas semi-définie négative.

**Exercice 3** Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant un engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, de sa variété de blé s'écrit

$$f(B, N) = -8B^2 - 2N^2 + 4BN + 120B$$

où  $B$  est la quantité de semences de blé utilisée et  $N$  la quantité d'engrais pulvérisé.

1. Etant éco-responsable, l'agriculteur décide tout d'abord de ne pas utiliser d'engrais. L'agriculteur peut-il espérer avoir un rendement maximum ? Si oui quel est il et pour quelle quantité de semences est il atteint ?
2. L'agriculteur s'oriente maintenant vers l'utilisation d'engrais. Appliquez les conditions nécessaires d'optimalité d'ordre 1 et 2 à  $f$  pour déterminer le nombre et la nature de ses points stationnaires. En ces points, calculez le rendement et comparez avec le résultat de la question précédente.
3. L'unité d'engrais coûte 5 fois plus cher que l'unité de semence, c'est une contrainte que l'agriculteur doit prendre en compte dans sa gestion du rendement. A budget fixé, il est donc contraint à respecter la contrainte  $B + 5N = 23$ . Appliquez les conditions nécessaires d'optimalité d'ordre 1 et 2 à  $f$  sous cette contrainte et comparez les valeurs obtenues à celles de la question précédente.