Examen d'Analyse Numérique

1ère année ISIMA

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

27 novembre 2007

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner une décomposition LU de A (sans recherche du pivot partiel).

Utiliser la décomposition LU de la première question pour résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 2y & + & z & = & 14 \\ 4x & - & 6y & + & 2z & = & 14 \\ -8x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 2 Soient les points de $\mathbb{R}^2$

$$(0,6); \quad (1,0) \quad ; (2,0)$$

1.– Trouver l'équation de la droite passant au mieux par ces points, au sens des moindres carrés. Calculer l'erreur commise.

Soit un modèle affine à une entrée $p(t) = a_0 + a_1 t$, où le vecteur $x = (a_0\ a_1)^T$ est le paramètre à déterminer. On effectue n mesures à partir des entrées $t_1, \ldots, t_n$ et soient $y_1, \ldots, y_n$ les mesures de sortie.

2.– Ecrire le système d'équations linéaires correspondant à ce problème. On notera A la matrice et y le second membre.

3.– Ecrire le système aux équation normales. Montrer que

$$A^T A = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{pmatrix}, \qquad A^T y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i y_i \end{pmatrix}$$

Calculer le vecteur x solution du système aux équations normales.

4.– On pose

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

les moyennes des t_i et y_i, respectivement. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i y_i - \bar{t}\bar{y}.$$

On pose

$$\sigma(t,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}), \quad \sigma(t^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2.$$

En déduire que

$$a_1 = \frac{\sigma(t,y)}{\sigma(t^2)} \qquad a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{t}$$

5.– Montrer que le point moyen $(\bar{t}, \bar{y})$ apartient à la droite $y = a_0 + a_1 t$.