# Examen d'Analyse Numérique –1ère année ISIMA

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

27 novembre 2008

**Exercice 1** Soit $A$ une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes, $m > n$, et $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On veut construire une matrice $M$ carrée de taille $m$ telle que
- $MA = S$, $S$ triangulaire supérieure
- $MM^T = D$, $D$ à diagonale strictement positive.

et appliquer cette factorisation de $A$ dans la résolution de systèmes linéaires, au sens des moindres carrés.

1. On pose $D = \Delta^2$. Montrer que $\Delta^{-1}M$ est orthogonale. En déduire la factorisation $QR$ de $A$ en fonction de $M, D$ et $S$
2. On considère le cas $m = 2$. Soient $x = (x_1 x_2)^T$ et $D = diag(d_1, d_2)$, $d_i > 0$ donnés.
   (a) On définit $M_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$. On suppose $x_2 \neq 0$. Calculer $M_1 x$ et $M_1 D M_1^T$. Comment choisir $M_1$ pour que $M_1 x$ soit parallèle à $e_1$ et que $M_1 D M_1^T$ soit diagonale ?
   (b) On définit $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$. On suppose $x_1 \neq 0$. Trouver $M_2$ telle que $M_2 x = \begin{pmatrix} x_1(1+\gamma_2) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 D M_2^T = \begin{pmatrix} d_1(1+\gamma_2) & 0 \\ 0 & d_2(1+\gamma_2) \end{pmatrix}$ et donner $\gamma_2$
3. Pour $m$ quelconque, définir les matrices $M_1(p, q)$ et $M_2(p, q)$ telles que :
   - $\begin{pmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$
   - $e_q^T M_i(p, q) x = 0$
   - $M_i D M_i^T$ soit diagonale, $D$ à diagonale strictement positive.
4. On peut alors décrire un algorithme qui utilise les matrices $M_i$ pour réduire $A$ à la forme triangulaire supérieure $MA = R$, $MM^T = diag(d_1 \cdots d_m)$. Montrer que $D^{-\frac{1}{2}}M$ est orthogonale, et en déduire une utilisation de cet algorithme pour résoudre $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$ ?