Examen d'Analyse Numérique
1ère année ISIMA - Jeudi 26 novembre 2009

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

Durée : 2 heures
Documents autorisés : cours, TD et TP de l'année.

Exercice 1 La factorisation $PA = LU$ d'une matrice 3×3 non singulière a pour facteurs

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer A^{-1}.

Exercice 2 soient J et U les matrices carrées de taille n suivantes :

$$J_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et } U_{i,,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A = (2I - J)U$. En déduire $det(A)$?
2. Montrer que $U^{-1} = I - J^T$
3. Calculez $J^2, \ldots, J^n$ (*Indication* : analyser le produit Jx pour tout $x \in R^n$)
4. Vérifier que $\left(I - \frac{J}{2}\right)^{-1} = I + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{J^k}{2^k}$
5. En déduire l'expression de A^{-1} et que $\|A^{-1}\|_\infty = 1 - 2^{-n}$
6. Montrer que pour la norme infinie, σ_A est de l'ordre de $2n$.

Exercice 3 Modification numériquement stable de l'algorithme de Gram-Schmidt

1. Soit la matrice (3×3), $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^{-3} & 10^{-3} & 0 \\ 10^{-3} & 0 & 10^{-3} \end{pmatrix}$

   Appliquez la méthode de Gram-Schmidt aux 3 colonnes de cette matrice avec une précision de 3 chiffres significatifs. Que remarquez vous ?
2. Reprendre l'étape k de l'algorithme de Gram-Schmidt qui transforme les colonnes $\{a_1, \ldots, a_n\}$ supposées linéairement indépendantes en n colonnes orthonormées $\{q_1, \ldots, q_n\}$ et montrez qu'elle s'écrit :

$$q_k = \frac{(I - Q_k Q_k^T) a_k}{\|(I - Q_k Q_k^T) a_k\|}$$

   où Q_1 est un vecteur colonne rempli de zéros et Q_k est la matrice formée par les $k-1$ premières colonnes q_i déja calculées.

3. Soient $E_1 = I$ et $E_i = I - q_i q_i^T, i = 2, \ldots, k-1$; quelle est l'interprétation de la matrice E_i ? Montrez que
$$E_{k-1} \ldots E_1 = I - Q_k Q_k^T$$
4. Réécrivez l'algorithme de Gram-Schmidt en alternant les transformations E_i avec les étapes de normalisation.
5. Appliquez cet algorithme de Gram-Schmidt modifié à la matrice de la question 1, toujours avec 3 chiffres significatifs. Que constatez vous ? Pouvez vous justifier cette amélioration ?