D.S. Analyse Numérique
ISIMA 1ère Année – Session de novembre 2011

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

Exercice 1 Soit A une matrice de taille $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J(x) = \|Ax - b\|^2$. On cherche à résoudre au mieux

$$Ax = b \tag{1}$$

1. Montrer que le problème
$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} J(x) = \min_y J(y) \tag{2}$$
admet au moins une solution. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que ce vecteur soit solution de (2). On note alors X_b l'ensemble des solutions de (2)
2. Donner la dimension de X_b en fonction du rang de A.
3. Soit le problème
$$\text{Trouver } x \in X_b \text{ tel que} \|x\|^2 = \min_y \|y\|^2$$
On admet que (3) admet une unique solution $\hat{x}$. Montrer que $\hat{x} \in X_b \cap Ket(A^TA)^\perp$

Exercice 2 On cherche à résoudre un système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice carrée de taille n. On utilise pour cela la méthode de Gauss Jordan, variante de la méthode de Gauss, qui suit les mêmes itérations avec les formules de mise à jour suivantes :

$$\forall i \in \{1 \cdots k-1, k+1 \cdots n\} a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k} a_{kj}^k, j = k \cdots n$$

et

$$\forall i \in \{1 \cdots k-1, k+1 \cdots n\} b_i^{k+1} = b_i^k - \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k} b_k^k,$$

1. Donner la différence par rapport à l'algorithme de Gauss vu en cours
2. Donnez en fonction de n le nombre de flops effectués par l'algorithme. Pour n grand, comparez ce nombre avec celui de la méthode de Gauss
3. Application numérique. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 12 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 28 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 28 \\ 48 \end{pmatrix}$. Trouver x.