ISIMA 1ère année

24 Juin 1999
Durée : 2 heures
Documents autorisés

AUTOMATES

Notation : Dans les exercices 2 et 3, la notation $|m|_x$ représentera le nombre d'occurrences d'une lettre x dans un mot m.

Exercice 1 :

Déterminer l'AFD minimal acceptant le langage

$$L = < (a^* + (ab)^* + (ba)^* + (a^2b^2)^* + (b^2a^2)^*)^* >$$

défini sur le vocabulaire $V = \{ a, b\}$.

Solution :

L est accepté par l'AFND suivant :

soit :

dont la relation de transition est représentée
par le tableau suivant :

On en déduit donc l'AFD dont la fonction de transition est représentée par le tableau suivant :

		a	a	b	b	
1	A	124	B	37	C	f
124	B	1245	D	137	E	f
37	C	1	A	8	F	
1245	D	1245	D	1367	G	f
137	E	124	B	378	H	f
8	F	9	I	-	-	
1367	G	124	B	1378	J	f
378	H	19	K	8	F	
9	I	1	A	-	-	
1378	J	1249	L	378	H	f
19	K	124	B	37	C	f
1249	L	1245	D	137	E	f

Minimisation (on désigne par M l'état puits) :

D'où l'AFD minimal:

Exercice 2 :

Déterminer l'APND acceptant le langage

$$L = \{ m \in V^* \text{ t.q. } |m|_a \geq |m|_b \}$$

défini sur le vocabulaire $V = \{ a, b \}$.

Solution : (état accepteur : q_3)

	a	b	ε
q_0	$(q_0, a, \varepsilon)\ (q_1, A)$	$(q_0, b, \varepsilon)\ (q_2, B)$	$(q_0, \varepsilon, Z)\ (q_3, Z)$
q_1	$(q_1, a, \varepsilon)\ (q_1, A)$	$(q_1, b, A)\ (q_1, \varepsilon)$ $(q_1, b, Z)\ (q_2, BZ)$	$(q_1, \varepsilon, \varepsilon)\ (q_3, \varepsilon)$
q_2	$(q_2, a, BB)\ (q_2, B)$ $(q_2, a, BZ)\ (q_1, Z)$	$(q_2, b, \varepsilon)\ (q_2, B)$	-
q_3	-	-	-

Algorithme :

q_0 : {
Si on lit *a* {empiler *A*, $\Rightarrow q_1$}
sinon, si on lit *b* {empiler *B*, $\Rightarrow q_2$}
sinon $\Rightarrow q_3$ }
q_1 : { // il y a au moins autant de *a* que de *b* //
Si on lit *a* {empiler *A*, $\Rightarrow q_1$}
sinon, si on lit *b* {
    si il y a encore des *A* {dépiler *A*, $\Rightarrow q_1$}
    sinon {empiler *B*, $\Rightarrow q_2$} } // sans perdre Z //
sinon $\Rightarrow q_3$ }
q_2 : { // il y a <u>strictement plus</u> de *b* que de *a* //
Si on lit *b* {empiler *B*, $\Rightarrow q_2$}
sinon, si on lit *a* {
    si il y au moins deux *B* {dépiler *B*, $\Rightarrow q_2$}
    sinon {empiler *A*, $\Rightarrow q_1$} } // sans perdre Z //
}
q_3 : état accepteur.

Exercice 3 :

Déterminer la machine de Turing acceptant le langage

$$L = \{\ m' = >m \text{ t.q. } m \in \{\ a, b, c\ \}^* \text{ et } |m|_a \geq |m|_b \geq |m|_c\ \}$$

défini sur le vocabulaire $V = \{ >, a, b, c \}$.

Solution : (état final : f)

	a	b	c	A	B	C	>	#
q_0	-	-	-	-	-	-	$(q_1,>,\rightarrow)$	-
q_1	$(q_2,A,\leftarrow)$	$(q_1,b,\rightarrow)$	$(q_1,c,\rightarrow)$	$(q_1,A,\rightarrow)$	$(q_1,B,\rightarrow)$	$(q_1,C,\rightarrow)$	-	$(q_{12},\#,\leftarrow)$
q_2	-	$(q_2,b,\leftarrow)$	$(q_2,c,\leftarrow)$	$(q_2,A,\leftarrow)$	$(q_2,B,\leftarrow)$	$(q_2,C,\leftarrow)$	$(q_3,>,\rightarrow)$	-
q_3	$(q_3,a,\rightarrow)$	$(q_4,B,\leftarrow)$	$(q_3,c,\rightarrow)$	$(q_3,A,\rightarrow)$	$(q_3,B,\rightarrow)$	$(q_3,C,\rightarrow)$	-	$(q_{12},\#,\leftarrow)$
q_4	$(q_4,a,\leftarrow)$	-	$(q_4,c,\leftarrow)$	$(q_4,A,\leftarrow)$	$(q_4,B,\leftarrow)$	$(q_4,C,\leftarrow)$	$(q_5,>,\rightarrow)$	-
q_5	$(q_5,a,\rightarrow)$	$(q_5,b,\rightarrow)$	$(q_6,C,\leftarrow)$	$(q_5,A,\rightarrow)$	$(q_5,B,\rightarrow)$	$(q_5,C,\rightarrow)$	-	$(q_7,\#,\leftarrow)$
q_6	$(q_6,a,\leftarrow)$	$(q_6,b,\leftarrow)$	-	$(q_6,A,\leftarrow)$	$(q_6,B,\leftarrow)$	$(q_6,C,\leftarrow)$	$(q_1,>,\rightarrow)$	-
q_7	$(q_7,a,\leftarrow)$	$(q_7,b,\leftarrow)$	-	$(q_7,A,\leftarrow)$	$(q_7,B,\leftarrow)$	$(q_7,C,\leftarrow)$	$(q_8,>,\rightarrow)$	-
q_8	$(q_9,A,\leftarrow)$	$(q_8,b,\rightarrow)$	-	$(q_8,A,\rightarrow)$	$(q_8,B,\rightarrow)$	$(q_8,C,\rightarrow)$	-	$(q_{12},\#,\leftarrow)$
q_9	-	$(q_9,b,\leftarrow)$	-	$(q_9,A,\leftarrow)$	$(q_9,B,\leftarrow)$	$(q_9,C,\leftarrow)$	$(q_{10},>,\rightarrow)$	-
q_{10}	$(q_{10},a,\rightarrow)$	$(q_{11},B,\leftarrow)$	-	$(q_{10},A,\rightarrow)$	$(q_{10},B,\rightarrow)$	$(q_{10},C,\rightarrow)$	-	$(q_{12},\#,\leftarrow)$
q_{11}	$(q_{11},a,\leftarrow)$	-	-	$(q_{11},A,\leftarrow)$	$(q_{11},B,\leftarrow)$	$(q_{11},C,\leftarrow)$	$(q_8,>,\rightarrow)$	-
q_{12}	$(q_{12},a,\leftarrow)$	-	-	$(q_{12},a,\leftarrow)$	$(q_{12},b,\leftarrow)$	$(q_{12},c,\leftarrow)$	$(f,>,\rightarrow)$	-
f	-	-	-	-	-	-	-	-

Algorithme :

q_0 : { lire le > ; $\Rightarrow q_1$ }

Répéter

- q_1 : { parcourir le ruban jusqu'au premier *a*; si on le trouve $\Rightarrow q_2$ sinon $\Rightarrow q_{12}$ }
- q_2 : { revenir au début du ruban, $\Rightarrow q_3$}
- q_3 : { parcourir le ruban jusqu'au premier *b*; si on le trouve $\Rightarrow q_4$ sinon $\Rightarrow q_{12}$ }
- q_4 : { revenir au début du ruban, $\Rightarrow q_5$}
- q_5 : { parcourir le ruban jusqu'au premier *c*; si on le trouve $\Rightarrow q_6$ sinon $\Rightarrow q_7$ }
- q_6 : { revenir au début du ruban, $\Rightarrow q_1$}

jusqu'à ce que, soit on ne trouve plus de *c* ($\Rightarrow q_7$), soit on ne trouve plus de *a* ou de *b* ($\Rightarrow q_{12}$)

q_7 : { revenir au début du ruban, $\Rightarrow q_8$}

Répéter

- q_8 : { parcourir le ruban jusqu'au premier *a*; si on le trouve $\Rightarrow q_9$ sinon $\Rightarrow q_{12}$ }
- q_9 : { revenir au début du ruban, $\Rightarrow q_{10}$}
- q_{10} : { parcourir le ruban jusqu'au premier *b*; si on le trouve $\Rightarrow q_{11}$ sinon $\Rightarrow q_{12}$ }
- q_{11} : { revenir au début du ruban, $\Rightarrow q_8$}

jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de *a* ou de *b* ($\Rightarrow q_{12}$)

q_{12} : { revenir au début du ruban en remplaçant *A*, *B*, et *C*, par *a*, *b*, et *c* ; $\Rightarrow$ f }

f : état final