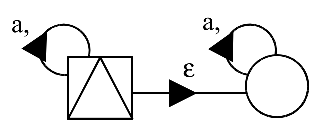
ISIMA 1ère année

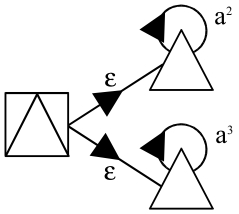
19 Juin 2000
Durée : 2 heures
Documents autorisés

AUTOMATES

Exercice 1 :

Indiquer (de manière informelle) quel est le langage accepté par chacun des AFND ci-dessous, après les avoir déterminisés et minimisés.

1°) 

2°) 

Correction :
1°)

	a	ε	
0	0	1	f
1	1		

⇒

	a	
0	0, 1	f
1	1	

⇒

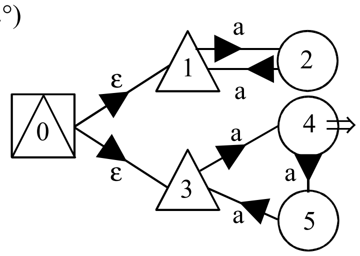
	a	
0	01	f
01	01	f

⇒

	a	
0	0	f

Le langage accepté est donc représenté par l'expression régulière a*.

2°)



	a	ε	
0		1, 3	f
1	2		f
2	1		
3	4		f
4	5		
5	3		

⇒

	a	
0	2,4	f
1	2	f
2	1	
3	4	f
4	5	
5	3	

⇒

	a	
0	24	f
24	15	
15	23	f
23	14	f
14	25	f
25	13	
13	24	f

⇒

	a	
0	1	f
1	2	
2	3	f
3	4	f
4	5	f
5	0	

Le langage accepté est $\{a^n,\ n$ multiple de 2 ou de 3$\}$.

Exercice 2 :

Soit l'APND M = $(V, Q, q_D, F, \Delta, \Gamma, Z)$ avec : $V = \{D,G\}$, $Q = \{q_D, q_G, q_F\}$, $F = \{q_F\}$, $\Gamma = V$ et

$\Delta = \{$ $((q_D,D,\varepsilon), (q_D,D))$, $((q_D,G,D), (q_D,\varepsilon))$, $((q_D,\varepsilon,Z), (q_F,Z))$,
$((q_D,G,Z), (q_G,GZ))$,
$((q_G,D,G), (q_G,\varepsilon))$, $((q_G,G,\varepsilon), (q_G,G))$, $((q_G,\varepsilon,Z), (q_F,Z))$,
$((q_G,D,Z), (q_D,DZ))$ $\}$.

Quel est le langage accepté par M ?

Remarques :

1°) la notation $((q,l,m), (q',m'))$ indique que lorsque M est dans l'état q, qu'il lit la lettre l sur le ruban, et que le mot m se trouve en tête de pile, alors M passe dans l'état q', dépile le mot m, puis empile le mot m';

2°) la pile se lit de gauche à droite, la tête de pile étant la lettre la plus à gauche. Par exemple, quand on empile le mot GZ, c'est la lettre G qui se trouve en tête de pile.

Correction :

En utilisant la notation de l'exercice 3, le langage accepté par M est $\{ m \in V^*$ tels que $|D_m| = |G_m|\}$.

Exercice 3 :

Soit V = {N, S, E, O}. Pour tout mot m de V^*, et pour toute lettre l de V, notons $|l_m|$ le nombre d'occurrences de la lettre l dans le mot m.
Construire une machine de Turing qui accepte $L = \{m \in V^*$ tels que $|N_m| = |S_m|$ et $|E_m| = |O_m|\}$.

Remarque : pour alléger les notations, toute transition correspondant à un simple déplacement sur le ruban de lecture, sans changement d'état, ni modification du ruban, pourra être notée par une simple flèche, → ou ←, selon la direction du déplacement.

Correction :

	>	N	S	E	O	x	#
q_0	→	$(q_{1N},x,\rightarrow)$	$(q_{1S},x,\rightarrow)$	$(q_{1E},x,\rightarrow)$	$(q_{1O},x,\rightarrow)$	→	$(q_3,\#,\leftarrow)$
q_{1N}		→	$(q_2,x,\leftarrow)$	→	→	→	
q_{1S}		$(q_2,x,\leftarrow)$	→	→	→	→	
q_{1E}		→	→	→	$(q_2,x,\leftarrow)$	→	
q_{1O}		→	→	$(q_2,x,\leftarrow)$	→	→	
q_2	$(q_0,>,\rightarrow)$	←	←	←	←	←	
q_3	$(q_F,>,\rightarrow)$					←	

Etat final : q_F.

Exercice 4 :

Soit $L_K = \{a^n b^k a^n,\ n \in IN,\ k \in K\}$, où K est un sous ensemble fini de IN, non vide et non réduit au singleton {0}.
Montrer que L_K est un langage hors contexte non régulier.

Correction :

$L_K = \bigcup_{k \in K} L_{\{k\}}$.

$\forall\ k \neq 0$, $L_{\{k\}}$ est hors contexte, car il est accepté par l'APND M = $(V, Q, q_0, F, \Delta, \Gamma, Z)$ avec :
$V = \{a,b\}$, $Q = \{q_0, q_{11}, \ldots, q_{1k}, q_2, q_F\}$, $F = \{q_F\}$, $\Gamma = \{A\}$ et
$\Delta = \{$ $((q_0,a,\varepsilon), (q_0,A))$, $((q_0,b,\varepsilon), (q_{11},\varepsilon))$,
$((q_{1k},a,A), (q_2,\varepsilon))$, $((q_{1i},b,\varepsilon), (q_{1(i+1)},\varepsilon))$ pour $i \in \{1,\ldots,k-1\}$,
$((q_2,a,A), (q_2,\varepsilon))$, $((q_2,\varepsilon,Z), (q_F,Z))$ $\}$.
Donc, comme l'union d'un nombre fini de langages hors contexte est un langage hors contexte, L_K est un langage hors contexte.

D'autre part L_K n'est pas un langage régulier, car on peut lui appliquer la contraposée du théorème du gonflement, à savoir qu'il existe un mot m de L_K tel que quelle que soit sa décomposition en trois partie x, u et y, $m = xuy$, $\exists\ n \in IN$ t.q. $xu^ny \notin L_K$. En effet :

- si u ne contient que des a, alors pour n>1, les parties gauches et droites du mot ne contiennent plus les mêmes nombres de a ;
- si u contient des a et des b, alors pour n>1, la structure du mot n'est plus respectée puisqu'on aura au moins deux fois une suite de a suivie d'une suite de b ;
- si u ne contient que des b, mettons p ($u = b^p$), alors xu^ny contient au moins np lettres b. Pour n tel que np > Max $\{k \in K\}$, il est certain que le nombre de b de xu^ny n'appartient pas à K, et donc que $m = xu^ny \notin L_K$.