ISIMA 1ère année. Durée : 2h00. Documents autorisés : feuille A4 manuscrite. 2011-2012

Examen de seconde session

Automates et langages formels

Exercice 1 – Graphes et languages. Considérons ici un *graphe* fini $G = (V, E)$ *orienté* et deux sommets distincts s et t de G. Dans cet exercice, nous appellerons *chemin* une suite (finie) d'arcs de G : $(u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_i, u_{i+1}), (u_{i+1}, u_{i+2}), \ldots, (u_{l-1}, u_l)$ de $u_0 = s$ vers $u_l = t$ (ici un chemin va donc de s *vers* t, en suivant des arcs de G). Attention, ici les chemins considérés ne sont pas nécessairement élémentaires ou simples : cela veut dire qu'un chemin peut "passer" plusieurs fois par un même sommet ou par un même arc.

On note $\mathcal{V}$ l'alphabet contenant chaque arc de G (chaque arc (u, v) de G est donc "vu" ici comme un caractère, noté aussi (u, v), de $\mathcal{V}$). On note $\mathcal{L}$ le langage, d'alphabet $\mathcal{V}$, composé de tous les chemins de G de s vers t (un chemin $(s, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_i, u_{i+1}), \ldots, (u_{l-1}, u_l)$ est associé au *mot* $(s, u_1)(u_1, u_2) \ldots (u_i, u_{i+1}) \ldots (u_{l-1}, u_l)$ de $\mathcal{L}$).

1. Quel est l'alphabet associé au graphe orienté de la figure 1 ? Donnez quelques mots du langage $\mathcal{L}$ associé à ce graphe. Est-ce que ce langage est fini ou infini ?
2. Etant donné un graphe orienté quelconque, est-ce que le langage $\mathcal{L}$ associé est fini ou infini ? Est ce que $\mathcal{L}$ est régulier ? Justifiez vos réponses.
3. Considérons maintenant des chemins (toujours de s vers t dans G) **élémentaires** (maintenant un chemin ne peut "passer" qu'au plus une seule fois par chaque sommet) :
   (a) Décrivez maintenant le langage associé au graphe orienté de la figure 1.
   (b) Etant donné un graphe orienté quelconque, est-ce que le langage $\mathcal{L}$ associé (avec des chemins élémentaires) est régulier ? Justifiez votre réponse.

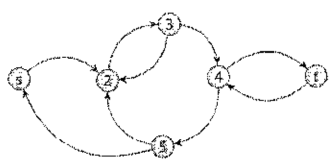

FIG. 1 – Un graphe orienté

Exercice 2 – Questions diverses.

1. Soit $\mathcal{L}$ un langage régulier sur un alphabet $\mathcal{V}$ ne contenant *pas* le caractère a. On construit le langage $\mathcal{L}$' en ajoutant à la fin de chaque mot w de $\mathcal{L}$ toutes les suites possibles de a, de longueurs quelconques mais finies :$\mathcal{L}' = \{wa^n : w \in \mathcal{L} \text{ et } n \geq 0\}$. Est ce que le langage $\mathcal{L}$' sur l'alphabet $\mathcal{V} \cup \{a\}$ est régulier ? Justifiez votre réponse.
2. Soit $\mathcal{L}$ un langage régulier sur un alphabet $\mathcal{V}$ ne contenant *pas* le caractère a mais contenant le caractère b. On construit le langage $\mathcal{L}$' en remplaçant, dans chaque mot w de $\mathcal{L}$, chaque caractère b par aaa. Est ce que le langage $\mathcal{L}$' est régulier ? Justifiez votre réponse.
3. Est ce que les phrases suivantes sont vraies ou fausses ; justifiez vos réponses :
   (a) Aucun langage hors contexte n'est régulier.
   (b) L'intersection de deux langages hors contextes n'est jamais un langage hors contexte.

Exercice 3 – Machine de Turing. Soit $V = \{a, b\}$. Ecrire une machine de Turing, M, qui accepte tout mot de V^* et tel que l'exécution de M sur un mot m de V^* trie les lettres de m dans l'ordre alphabétique (par exemple, l'exécution de M sur le mot $abbaaabaab$ doit retourner $aaaaaabbbb$).