ISIMA 1ère année

26 Juin 1998
Durée : 2 heures
Documents autorisés

AUTOMATES

Exercice 1 :
Soit $V = \{a, b\}$.
1°) Donner l'AFD correspondant à l'AFND suivant :

Solution :

	a	*b*
1	1,2	1,3
2	2	2,4
3	3,4	3
4	4	4

2°) Montrer que l'AFD obtenu est minimal.
Solution :
Classes de 0-équivalence : {1, 12, 13}, {1234};
Classes de 1-équivalence : {1}, {12}, {13}, {1234}: l'automate est donc minimal.

3°) Déterminer l'expression régulière représentant le langage accepté par cet automate.
Solution :
La grammaire qui génère ce langage est la suivante: $\{ V_N, V_T, S, \mathbf{R}\}$, avec $V_N = \{ S, A, B, F\}$, $V_T = \{a, b\}$ et $\mathbf{R} = \{ S \to aA, S \to bB, A \to aA, B \to bB, A \to bF, B \to aF, F \to aF, F \to bF, F \to \varepsilon\}$($S$ correspond à l'état 1, A à l'état 12, B à l'état 13, et F à l'état 1234).

D'où le système correspondant :
$$\begin{cases} F = (a+b)F + \varepsilon \Rightarrow F = (a+b)^* \\ B = bB + aF \Rightarrow B = bB + a(a+b)^* \Rightarrow B = b^*a(a+b)^* \\ A = aA + bF \Rightarrow A = aA + b(a+b)^* \Rightarrow A = a^*b(a+b)^* \\ S = aA + bB \Rightarrow S = (a^+b + b^+a)(a+b)^* \end{cases}.$$
L'expression régulière représentant le langage accepté par l'AFD est donc $(a^+b + b^+a)(a + b)^*$.

4°) Déterminer l'expression régulière représentant le langage $\overline{L} = V^* - L$ (complémentaire de L dans V^*), ainsi que l'AFD acceptant ce langage.
Solution :
On peut d'abord déterminer l'AFD acceptant $\overline{L}$ en inversant états accepteurs et états non accepteur de l'automate obtenu au 1°).

On obtient :

L'expression régulière représentant $\overline{L}$ est donc $\varepsilon + a^+ + b^+ = a^* + b^*$.
On peut également, de manière moins formelle remarquer que L est le langage des mots qui contiennent au moins un a et un b, et donc que $\overline{L}$ contient les mots qui ne contiennent que des a et des b, plus le mot vide, d'où l'automate.

Exercice 2 :
Soit $V = \{a, b\}$.
Soit L le langage des mots de V^* comportant le même nombre de a que de b, dans un ordre quelconque.
1°) Ecrire l'APND acceptant L.
Solution :

	a	b	ε
q_0	(q_0, a, ε) (q_A, A)	(q_0, b, ε) (q_B, B)	(q_0, ε, Z) (q_F, Z)
q_A	(q_A, a, ε) (q_A, A)	(q_A, b, A) (q_A, ε) (q_A, b, Z) (q_B, B)	(q_A, ε, Z) (q_F, Z)
q_B	(q_B, a, B) (q_B, ε) (q_B, a, Z) (q_A, A)	(q_2, b, ε) (q_2, B)	(q_2, ε, Z) (q_F, Z)
q_F (état final)			

2°) $\overline{L} = V^* - L$ est-il hors contexte ?
Solution :

On montre que $\overline{L}$ est hors-contexte en déterminant l'APND acceptant $\overline{L}$:

	a	b	ε
q_0	(q_0, a, ε) (q_A, A)	(q_0, b, ε) (q_B, B)	
q_A	(q_A, a, ε) (q_A, A)	(q_A, b, A) (q_A, ε) (q_A, b, Z) (q_B, B)	(q_A, ε, A) (q_F, A)
q_B	(q_B, a, B) (q_B, ε) (q_B, a, Z) (q_A, A)	(q_2, b, ε) (q_2, B)	(q_2, ε, B) (q_F, B)
q_F (état final)			

Exercice 3 :
Soit $V = \{a, b, c\}$.
Soit L le langage des mots de V^* comportant le même nombre de a de b et de c, dans un ordre quelconque.
1°) Ecrire la machine de Turing acceptant le langage $\{>\}L$, c'est à dire acceptant tout mot de L précédé par le caractère ">" (par exemple >abbcbacca). Expliciter l'algorithme choisi.
Solution :
Principe de l'algorithme:
on recherche un a en parcourant le ruban d'abord vers la gauche (q_{0L}) (si la position courante n'est pas le début de ruban), puis vers la droite (q_{0R}). Si l'on trouve un a, on le barre, et on recherche un b (q_{1L} et/ou q_{1R}) , puis un c (q_{2L} et/ou q_{2R}) suivant le même principe de parcours (qui consiste à essayer de revenir au début du ruban tout en continuant la recherche, plutôt qu'à revenir en début de ruban en ignorant les lettres que l'on va rechercher seulement en parcourant le ruban de gauche à droite). Si la recherche d'un b ou d'un c est infructueuse (c'est à dire que l'on a parcouru le ruban vers la gauche jusqu'au début, puis vers la droite jusqu'à la fin sans trouver de b ou de c), alors la machine est bloquée, car dans ce cas, il y un a de plus que de b ou de c. Par contre, à chaque nouvelle itération (passage par q_{0L}), si la recherche du a est infructueuse, alors il faut vérifier qu'il n'y a plus ni b ni c (q_3).

	>	a	b	c	/	#
q_{0L}	$(q_{0R}, >, R)$	(q_{1L}, A, L)	(q_{0L}, b, L)	(q_{0L}, c, L)	$(q_{0L}, /, L)$	
q_{0R}		(q_{1L}, A, L)	(q_{0R}, b, R)	(q_{0R}, c, R)	$(q_{0R}, /, R)$	$(q_3, \#, L)$
q_{1L}	$(q_{1R}, >, R)$	(q_{1L}, a, L)	(q_{2L}, B, L)	(q_{1L}, c, L)	$(q_{1L}, /, L)$	
q_{1R}		(q_{1R}, a, R)	(q_{2L}, B, L)	(q_{1R}, c, R)	$(q_{1R}, /, R)$	
q_{2L}	$(q_{2R}, >, R)$	(q_{2L}, a, L)	(q_{2L}, b, L)	(q_{0L}, C, L)	$(q_{2L}, /, L)$	
q_{2R}		(q_{2R}, a, R)	(q_{2R}, b, R)	(q_{0L}, C, L)	$(q_{2R}, /, R)$	
q_3	$(q_F, >, R)$				$(q_3, /, L)$	
q_F						

q_F est l'état final.

2°) A quoi sert le caractère ">" ? Quelle serait la difficulté si l'on ne l'avait pas utilisé ?
Solution :
Le caractère ">" sert à marquer le début de ruban. Si l'on ne l'utilisait pas, il faudrait alors marquer le début de ruban, en utilisant 3 symboles différents en fonction du fait que le premier caractère est un a, un b ou un c, plus un symbole supplémentaire pour indiquer que l'on a barré ce caractère.