Examen de calcul différentiel ISIMA première année, 20 juin 2012.

1 Exercice

On se donne le jeu de données suivant, pour $i = 0, 1, 2$:

x_i	-2	0	4
y_i	5	-1	3

1. Déterminer la base de Lagrange associée aux points x_0, x_1 et x_2.
2. En déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange P associé aux trois points (x_i, y_i).
3. Retrouver l'expression du polynôme P par l'algorithme de Newton.
4. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i), 0 \leq i \leq 2$ et $(x_3, y_3) = (1, 0)$, en appliquant la méthode de Newton.

2 Exercice

(Méthode de Simpson 3/8.) Pour $f \in C^0([-1,1];\mathbb{R})$, on pose :

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \qquad \text{et} \qquad J(f) = w_0 f(-1) + w_1 f(-\frac{1}{3}) + w_2 f(\frac{1}{3}) + w_3 f(1).$$

1. Calculer les w_i pour que $I(f) = J(f)$ quand f est un polynôme de degré ≤ 3.
2. Montrer que la formule est fausse pour les polynômes de degré 4.
3. Pour $f(x) = \sqrt{x+1}$, calculer $I(f)$ et $J(f)$.
   On donne $\sqrt{2} \simeq 1.41$, $\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0.82$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.58$.

3 Exercice

Soit l'équation différentielle du second ordre :

$$y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = -8, \quad \text{pour } x \in [0, T],$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$, et $T > 0$.

1. Ecrire cette équation sous la forme d'un système différentiel de deux équations d'ordre 1.
2. Appliquer la méthode d'Euler explicite pour résoudre numériquement ce système. Application : prendre $T = 0.2$ et un pas $h = 0.1$ et calculer une approximation de $y(T)$.
3. Mêmes questions avec la méthode de Runge Kutta d'ordre 2, où on se limitera à $T = 0.1$, toujours avec $h = 0.1$.

4 Exercice

Soit la courbe $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, où $a < b$, définie par $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = \sqrt{2}\, t \end{pmatrix}$.

On note s un paramètre intrinsèque de la courbe, et on note $\vec{q}$ la courbe définie par $\vec{q}(s) = \vec{r}(t)$ quand $s = s(t)$.

1. Calculer $s'(t)$ (on rappelle que $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ et que $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$).
2. Calculer $\vec{q}\,'(s(t))$ en fonction de $\vec{r}\,'(t)$.
3. Calculer $\vec{q}\,''(s(t))$ en fonction de $\vec{r}\,'(t)$ et de $\vec{r}\,''(t)$. On ne demande de calculer ni $||\vec{q}\,''(s)||$ ni $\vec{n}(s)$.
4. Calculer $\vec{q}\,'(s) \wedge \vec{q}\,''(s)$ en fonction de t : on pourra se servir de $\vec{q}\,'(s(t))$ est parallèle à $\vec{r}\,'(t)$.
5. Calculer $||\vec{q}\,'(s) \wedge \vec{q}\,''(s)||$ et en déduire $\vec{b}(s)$ quand $s = s(t)$.
6. Calculer $\vec{b}\,'(s)$ et en déduire la torsion (le signe de la torsion sera donné par comparaison