Examen de calcul différentiel ISIMA première année, 21 juin 2011, feuille recto verso

1 Exercice

Soit Ω le demi-disque supérieur centre $\vec{0}$ et de rayon R, et soit Γ son bord (à dessiner). Soit :

$$I = \int_\Gamma x^3\,dy - y^3\,dx.$$

1. Paramétrer Γ.
2. Calculer directement I. Vous vérifierez que $\cos^4 t + \sin^4 t = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4t)$.
3. Paramétrer Ω.
4. Calculer I à l'aide de la formule de Green-Riemann. On rappelle que $\int_\Gamma \vec{f}\,d\vec{r} = \int_\Omega \mathrm{rot}\vec{f}\,d\Omega$, et vous donnerez $\vec{f}$ et $\mathrm{rot}\vec{f}$.

2 Exercice

Soit $f \in C^0([-1,1])$. On considère la formule d'intégration numérique :

$$J(f) = \alpha f(-\frac{2}{3}) + \beta f(0) + \gamma f(\frac{2}{3}) \approx \int_{-1}^{1} f(s)\,ds \tag{1}$$

1. Déterminer les coefficients α, β et γ de sorte que la formule (1) soit exacte pour les polynômes de degré 3. La formule est-elle alors exacte pour les polynômes de degré 4 ?
2. Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $-\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Donner les deux polynômes de Lagrange de base et l'expression de P dans cette base.
3. Retrouver l'expression du polynôme P par l'algorithme de Newton.
4. On ajoute le point $(0, f(0))$. Donner le polynôme de Newton associé.

3 Exercice

Dans cet exercice on considère le problème suivant, pour $t \in [0,1]$:

$$y' = -ty^2, \quad y(0) = 2,$$

dont la solution exacte est $y(t) = \frac{2}{1+t^2}$. Vous noterez h le pas de temps.

1. Représenter sur $[0,1]$.
2. Donner le schéma d'Euler explicite.
3. Donner le schéma d'Euler implicite dont on rappelle qu'il est basé sur le développement limité $u(t_1) = u(t_0) + (t_1 - t_0)u'(t_1) + o(t_1 - t_0)$ qu'on justifiera. On rappelle que nécessairement $y_{n+1} \xrightarrow[h\to 0]{} y_n$.
4. Pour un pas de temps $h = 0.1$, calculer les valeurs y_1 données par Euler explicite, implicite. ainsi que la valeur exacte. On donne $\sqrt{1.08} \simeq 1.039$ et $\frac{2}{1.01} \simeq 1.98$. Commentez.

4 Exercice

Soit la courbe $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, où $a < b$, définie par $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}} \\ z(t) = \dfrac{t^3}{3} \end{pmatrix}$.

On note s un paramètre intrinsèque de la courbe. et on note $\vec{q}$ la courbe définie par $\vec{q}(s) = \vec{r}(t)$ quand $s = s(t)$.

1. Montrer que $s'(t) = 1 + t^2$.
2. Calculer $\vec{q}\,'(s(t))$ en fonction de $\vec{r}\,'(t)$.
3. Calculer $\vec{q}\,''(s(t))$ en fonction de $\vec{r}\,'(t)$ et de $\vec{r}\,''(t)$. On ne demande de calculer ni $||\vec{q}\,''(t)||$ ni $\vec{n}(t)$.
4. Sachant que $\vec{q}\,'(s(t))$ est parallèle à $\vec{r}\,'(t)$, calculer $\vec{q}\,'(s) \wedge \vec{q}\,''(s)$ en fonction de t.
5. Calculer $||\vec{q}\,'(s) \wedge \vec{q}\,''(s)||$ et en déduire que $\vec{b}(s) = \frac{1}{(1+t^2)^{2}} \begin{pmatrix} t^2 \\ -\sqrt{2}\,t \\ 1 \end{pmatrix}$ quand $s = s(t)$.
6. Calculer $\vec{b}\,'(s)$ et en déduire la torsion (le signe de la torsion sera donné par comparaison avec $\vec{q}\,''(t)$).