Examen de calcul différentiel ISIMA première année, 28 août 2012.

1 Exercice

On se donne une fonction f dont le graphe passe par les points suivants, pour $i = 0, ..., 3$:

x_i	0	2	3	4
y_i	7	11	28	63

1. Déterminer la base de Lagrange associée aux points x_0, x_1, x_2.
2. En déduire le polynôme p_2 d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i=0,...,2}$.
3. Retrouver l'expression du polynôme p_2 par l'algorithme de Newton.
4. Donner le polynôme d'interpolation associé aux points $(x_i, y_i)_{i=0,...,3}$.

2 Exercice

Soit h un réel strictement positif. On désigne par φ une fonction continue sur $[-h, h]$.
Pour approcher l'intégrale de φ entre -h et h, on considère la formule d'intégration numérique :

$$J(\varphi) = h(\,a\varphi(-h) + b\varphi(0) + c\varphi(h)\,).$$

1. Donner a, b, c pour que, pour $p = 0, 1, 2$:
$$J(x \to x^p) = \int_{-h}^{h} x^p\,dx.$$
2. A-t-on pour tout polynôme P de degré 3 et de degré 4 :
$$J(x \to P(x)) = \int_{-h}^{h} P(x)dx \text{ ?}$$

3 Exercice

On considère l'équation différentielle suivante, pour $t \in [0, 1]$:

$$y''(t) - 3y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

1. Ecrire cette équation différentielle sous la forme d'un système différentiel d'ordre un.
2. Noter h le pas de temps et donnez les schémas relatifs à ce problème pour les méthodes : Euler explicite et Runge-Kutta d'ordre 2.
3. Pour $h = 0.1$, calculer les valeurs approchées obtenues par ces méthodes pour $y(0.2)$.

4 Exercice

Dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{f} = (f_1, f_2)$ où $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont les fonctions définies par :

$$f_1(x, y) = -y^2 x, \qquad f_2(x, y) = x^2 y,$$

et $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ les courbes :

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y);\ 0 \le x \le 1,\ y = 0\}, \tag{1}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y);\ x = 0,\ 0 \le y \le 1\}, \tag{2}$$
$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}. \tag{3}$$

On oriente $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ dans le sens direct.

1. Dessiner et donner une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$ (par morceaux).
2. Calculer les intégrales curvilignes $\int_{\mathcal{C}_i} f_1\,dx$ et $\int_{\mathcal{C}_i} f_2\,dy$ pour $i = 1, ..., 3$, puis $\int_{\mathcal{C}} \vec{f}.d\vec{r}$.
Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ donné par :
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\},$$
et I l'intégrale double :
$$I = \iint_D xy\,dxdy.$$
3. Dessiner et paramétrer le domaine D.
4. Calculer I par un calcul direct, puis en utilisant le résultat de la question précédente.