ISIMA 1ère année

jeudi 19 décembre 2002
Durée : 2 heures
Documents autorisés

PROBABILITES

Exercice 1 :

On considère N urnes, numérotées de 1 à N, contenant chacune M boules. Les urnes numérotées de 1 à $N-1$ contiennent chacune B boules blanches et R boules rouges, avec $B+R=M$. L'urne numérotée N contient, quant à elle, M boules rouges.
Une urne est choisie au hasard, uniformément entre 1 et N. On effectue k tirage(s) dans cette urne et l'on obtient k boules rouges ($k \geq 1$).
Dans les deux cas de tirages avec remise, et sans remise, donner, en fonction de N, M, R et k, la probabilité pour que ces tirages aient été effectués dans l'urne N.

Solution :
Soit U_n l'événement : " l'urne n a été choisie " , $n \in \{1, \ldots, N\}$;
Soit R_k l'événement : " on a tiré k boules rouges ", $k \in \mathbb{N}^*$ pour le cas avec remise, et $k \in \{1, \ldots, M\}$ pour le cas sans remise ;
On applique la formule de Bayes :

$$\mathbf{P}(U_N \mid R_k) = \frac{\mathbf{P}(R_k \mid U_N)\,\mathbf{P}(U_N)}{\mathbf{P}(R_k)}.$$

Or $\mathbf{P}(R_k) = \sum_{n=1}^{N-1} \mathbf{P}(R_k \mid U_n)\,\mathbf{P}(U_n) + \mathbf{P}(R_k \mid U_N)\,\mathbf{P}(U_N)$.

Comme $\forall\, n \in \{1, \ldots, N\}$ $\mathbf{P}(U_n) = \frac{1}{N}$, et $\mathbf{P}(R_k \mid U_N) = 1$, on a donc :

$$\mathbf{P}(U_N \mid R_k) = \frac{\mathbf{P}(R_k \mid U_N)}{1 + \sum_{n=1}^{N-1} \mathbf{P}(R_k \mid U_n)}.$$

Cas avec remise : $\forall\, n \in \{1, \ldots, N-1\}$, $\mathbf{P}(R_k \mid U_n) = \left(\frac{R}{M}\right)^k$, d'où :

$$\mathbf{P}(U_N \mid R_k) = \frac{1}{1+(N-1)\left(\dfrac{R}{M}\right)^k}$$

Cas sans remise ($k \leq M$) :

Si $k \leq R$, $\forall\, n \in \{1, \ldots, N-1\}$, $\mathbf{P}(R_k \mid U_n) = \dfrac{C_R^k}{C_M^k} = \dfrac{\dfrac{R!}{k!(R-k)!}}{\dfrac{M!}{k!(M-k)!}} = \dfrac{R!(M-k)!}{M!(R-k)!}$, d'où :

$$\mathbf{P}(U_N \mid R_k) = \frac{1}{1+(N-1)\dfrac{R!(M-k)!}{M!(R-k)!}}.$$

Si $k > R$, $\forall\, n \in \{1, \ldots, N-1\}$, $\mathbf{P}(R_k \mid U_n) = 0$, d'où $\mathbf{P}(U_N \mid R_k) = 1$.

<u>**Exercice 2**</u> :

Un enfant empile des cubes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement correspondant au fait qu'il ait pu empiler n cubes sans que sa pile ne s'effondre. On pose :

$$\mathbf{P}(A_1) = 1, \text{ et } \forall\, n > 1,\ \mathbf{P}(A_n \mid A_{n-1}) = \lambda^{n-1}, \text{ avec } \lambda \in\ ]\,0\,;1\,[\,.$$

1°) Quelle relation ensembliste existe-t-il entre $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

2°) Calculer $\mathbf{P}(A_2)$, $\mathbf{P}(A_3)$, $\mathbf{P}(A_4)$, … et en déduire $\mathbf{P}(A_n)$.

3°) On suppose que le jeu ne comporte que N cubes. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre maximal de cubes empilés avant l'effondrement de la pile.

a) Exprimer l'événement "$X = n$" en fonction de A_n et de (sauf pour $n = N$) A_{n+1}.

b) En déduire $\mathbf{P}(X = n)$.

c) En déduire $\mathbf{E}[X]$ en fonction des $\mathbf{P}(A_n)$, $1 \leq n \leq N$.

<u>Solution</u> :

1°) On a $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$

2°) $\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_2 \cap A_1) = \mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbf{P}(A_1) = \lambda \times 1 = \lambda$;

$\mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_3 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_3 \mid A_2) \times \mathbf{P}(A_2) = \lambda^2 \times \lambda = \lambda^3$;

$\mathbf{P}(A_4) = \mathbf{P}(A_4 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_4 \mid A_3) \times \mathbf{P}(A_3) = \lambda^3 \times \lambda^3 = \lambda^6$;

Hypothèse de récurrence : $\mathbf{P}(A_n) = \lambda^{\sum_{k=1}^{n-1} k} = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

Alors $\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) = \mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) \times \mathbf{P}(A_n) = \lambda^n \times \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

On a donc, $\forall\ n \in I\!N^*$, $\mathbf{P}\,(\,A_n\,) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

3°) a) $\forall\ n \in \{\ 1, \ldots, N-1\ \}$, "$X = n$" $= A_n - A_{n+1}$, et "$X = N$ " $= A_N$.

b) $\mathbf{P}\,(\,X = n\,) = \mathbf{P}\,(\,A_n\,) - \mathbf{P}\,(\,A_{n+1}\,) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} - \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-\lambda^n)$.

c) $\mathbf{E}\,[\,X\,] = (\,\mathbf{P}\,(\,A_1\,) - \mathbf{P}\,(\,A_2\,)\,) + 2\,(\,\mathbf{P}\,(\,A_2\,) - \mathbf{P}\,(\,A_3\,)\,) + 3\,(\,\mathbf{P}\,(\,A_3\,) - \mathbf{P}\,(\,A_4\,)\,) + \ldots$

$$\ldots + (N-1)\,(\,\mathbf{P}\,(\,A_{N-1}\,) - \mathbf{P}\,(\,A_N\,)\,) + N\,\mathbf{P}\,(\,A_N\,) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}\,(\,A_n\,).$$

__Exercice 3__ :

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par :

$$X\,(\,\Omega\,) = \{\,\tfrac{1}{n},\ n \in I\!N^*\,\},\ \text{et } \mathbf{P}\,(\,X = \tfrac{1}{n}\,) = K\,\alpha^n,\ \text{avec } \alpha \in\ ]\,0\,;\,1\,[\ .$$

1°) Déterminer la valeur de K.

2°) Déterminer la loi des variables aléatoires $I = \frac{1}{X}$ et $U = XI$.

3°) Déterminer la loi de $C = \frac{1}{X^2} - \frac{4}{X} + 4$.

4°) Soit Y une variable aléatoire discrète dont la loi est la même que celle de X, et indépendante de X. Déterminer la loi de $S = \frac{XY}{X+Y}$.

<u>Solution</u> :

1°) $\displaystyle\sum_{n \in I\!N^*} \mathbf{P}\left(X = \frac{1}{n}\right) = K \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n = K\left(\frac{1}{1-\alpha} - 1\right) = K\frac{\alpha}{1-\alpha} = 1 \Rightarrow K = \frac{1-\alpha}{\alpha}$.

2°) $I\,(\,\Omega\,) = I\!N^*$, et $\mathbf{P}\,(\,I = n) = K\,\alpha^n$.

$U = XI$ est la variable certaine égale à 1 : $U\,(\,\Omega\,) = \{\,1\,\}$ et $\mathbf{P}\,(\,U = 1) = 1$.

3°) $C = I^2 - 4I + 4 = (\,I - 2\,)^2$, donc $C\,(\,\Omega\,) = \{\ (\,n-2\,)^2,\ n \in I\!N^*\,\}$,

et $\mathbf{P}\,[\,C = (\,n-2\,)^2\,] = \mathbf{P}\left[\left(\frac{1}{X} - 2\right)^2 = (n-2)^2\right] = \mathbf{P}\left[\left(\frac{1}{X} - n\right) \times \left(\frac{1}{X} + n - 4\right) = 0\right]$

$$= \mathbf{P}\left[\left\{\left(\frac{1}{X} - n\right) = 0\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{X} + n - 4\right) = 0\right\}\right]$$

$$= \mathbf{P}\left[\left(\frac{1}{X} - n\right) = 0\right] + \mathbf{P}\left[\left(\frac{1}{X} + n - 4\right) = 0\right] - \mathbf{P}\left[\left\{\left(\frac{1}{X} - n\right) = 0\right\} \cap \left\{\left(\frac{1}{X} + n - 4\right) = 0\right\}\right]$$

1^{er} cas : $n = 4$. L'événement $\left(\frac{1}{X} + n - 4\right) = 0$ est l'événement impossible, donc :

$$\mathbf{P}\,[\,C = (\,n-2\,)^2\,] = \mathbf{P}\,[\,C = 4\,] = \mathbf{P}\left[\left(\frac{1}{X} - 4\right) = 0\right] = \mathbf{P}\left[X = \frac{1}{4}\right] = K\,\alpha^4 = \alpha^3 - \alpha^4.$$

$2^{ème}$ cas : n $\neq$ 4. On peut alors écrire :

$$\mathbf{P}\,[\,C = (\,n-2\,)^2\,] = \mathbf{P}\left[X = \frac{1}{n}\right] + \mathbf{P}\left[X = \frac{1}{4-n}\right] - \mathbf{P}\left[X = \frac{1}{4-n} = \frac{1}{n}\right]$$

1^{er} sous-cas : $n = 4 - n \Rightarrow n = 2$. On obtient :

$$\mathbf{P}\,[\,C = (\,n-2\,)^2\,] = \mathbf{P}\,[\,C = 0\,] = \mathbf{P}\left[X = \frac{1}{2}\right] = K\,\alpha^2 = \alpha - \alpha^2.$$

$2^{ème}$ sous-cas : $n \neq 2$. On a donc :

$$\mathbf{P}\,[\,C = (\,n-2\,)^2\,] = \mathbf{P}\left[X = \frac{1}{n}\right] + \mathbf{P}\left[X = \frac{1}{4-n}\right]$$

1^{er} sous-sous-cas : $4 - n \geq 1 \Leftrightarrow n \leq 3$, soit $n \in \{\,1\,,\,3\,\}$. Dans ce cas, on a :

$$\mathbf{P}\,[\,C = (\,n-2\,)^2\,] = \mathbf{P}\,[\,C = 1\,] = \mathbf{P}[X = 1] + \mathbf{P}\left[X = \frac{1}{3}\right] = K\,(\alpha + \alpha^3) = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3.$$

$2^{ème}$ sous-sous-cas : $4 - n < 0 \Leftrightarrow n > 4$. On a enfin :

$$\mathbf{P}\,[\,C = (\,n-2\,)^2\,] = \mathbf{P}\left[X = \frac{1}{n}\right] = K\,\alpha^n = \alpha^{n-1} - \alpha^n.$$

4°) $S = \frac{XY}{X+Y} = \dfrac{1}{\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}} = \dfrac{1}{S'}$.

La loi de S' est donnée par $S'(\,\Omega\,) = \mathbb{N} - \{\,0\,,\,1\,\}$ et $\mathbf{P}\,(\,S' = n\,) =$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(\frac{1}{X} = k\right) \times \mathbf{P}\left(\frac{1}{Y} = n-k\right) = K^2 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k\,\alpha^{n-k} = (n-1)\,\alpha^{n-2}\,(1-\alpha)^2.$$

Donc $S\,(\,\Omega\,) = \{\,\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N} - \{0,1\}\,\}$, et $\mathbf{P}\,(\,S = \frac{1}{n}\,) = (n-1)\,\alpha^{n-2}\,(1-\alpha)^2$.