ISIMA 1ère année

lundi 14 janvier 2002
Durée : 2 heures
Documents autorisés

PROBABILITES

Exercice 1 :
La probabilité pour qu'un étudiant inscrit dans une école d'ingénieur en sorte diplômé est égale à 0.9. Quelle est la probabilité pour que sur 5 étudiants,
(a) aucun
(b) un seul
(c) au moins un
(d) tous
soient diplômés ?

Solution
Si X désigne la variable aléatoire représentant le nombre, parmi 5 étudiants, de ceux qui sortiront diplômés de l'école, alors $X \in \mathbf{B}(n, p)$, avec $n = 5$ et $p = 0.9$.
On a donc $\mathbf{P}(X = k) = C_5^k (0.9)^k (0.1)^{5-k}$.
(a) $\mathbf{P}(X = 0) = (0.1)^5 = 10^{-5}$;
(b) $\mathbf{P}(X = 1) = 5 \times 0.9 \times (0.1)^4 = 0.45\ 10^{-3}$;
(c) $\mathbf{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = 0.99999$;
(d) $\mathbf{P}(X = 5) = (0.9)^5 \approx 0.59$.

Exercice 2 :
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant respectivement 70% et 80% de boules blanches. U_1 contient trois fois plus de boules que U_2.
On met toutes les boules de U_1 et de U_2 dans une même urne U. On tire de U une boule au hasard, et on constate qu'elle est blanche.
Quelle est la probabilité pour que cette boule provienne initialement de l'urne U_1 ?

Solution :
Soit B l'événement "on tire une boule blanche". Soient U_1 (respectivement U_2) les événements "la boule tirée provient de l'urne U_1 (respectivement U_2)".
$\mathbf{P}(B \mid U_1) = 0.7$; $\mathbf{P}(B \mid U_2) = 0.8$; $\mathbf{P}(U_1) = 3/4$; $\mathbf{P}(U_2) = 1/4$.
D'après le théorème de Bayes :

$$\mathbf{P}(U_1 \mid B) = \frac{\mathbf{P}(B \mid U_1) \times \mathbf{P}(U_1)}{\mathbf{P}(B \mid U_1) \times \mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}(B \mid U_2) \times \mathbf{P}(U_2)} = \frac{7/10 \times 3/4}{7/10 \times 3/4 + 8/10 \times 1/4} = \frac{21}{29}.$$

Exercice 3 :
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.
Déterminer la distribution de $Z = |X - Y|$.
Dans le cas particulier $\lambda = \mu$, commenter le résultat.

Solution :

$X \in \mathbf{Exp}(\lambda), f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$; $Y \in \mathbf{Exp}(\mu), f_Y(y) = \lambda\, e^{-\mu y}$;

Loi de $-Y$:

$\mathbf{P}(-Y \le y) = \mathbf{P}(Y \ge -y) = 1 - F_Y(-y)$

$\Rightarrow f_{-Y}(y) = f_Y(-y) = \mu\, e^{\mu y}$ pour $y \le 0$ et $f_{-Y}(y) = 0$ pour $y \ge 0$.

Loi de $Z' = X - Y$:

$f_{Z'}(z) = \int_{IR} f_X(z-t)\, f_{-Y}(t)\, dt = \mu \int_{-\infty}^{0} f_X(z-t)\, e^{\mu t}\, dt$ avec $f_X(z-t) = \lambda\, e^{-\lambda(z-t)}$ pour $z - t \ge 0$, soit $t \le z$, et $f_X(z-t) = 0$ pour $t \ge z$.

Si $z \le 0$: $f_{Z'}(z) = \lambda\mu \int_{-\infty}^{z} e^{-\lambda z}\, e^{(\lambda+\mu)t}\, dt = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\, e^{-\lambda z}\, e^{(\lambda+\mu)z} = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\, e^{\mu z}$;

Si $z \ge 0$: $f_{Z'}(z) = \lambda\mu \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda z}\, e^{(\lambda+\mu)t}\, dt = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\, e^{-\lambda z}$;

Loi de $Z = |Z'| = |X - Y|$:

$F_Z(z) = \mathbf{P}(|Z'| \le z) = \mathbf{P}(-z \le Z' \le z) = F_{Z'}(z) - F_{Z'}(-z)$

$\Rightarrow f_Z(z) = f_{Z'}(z) + f_{Z'}(-z) = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\,(e^{-\lambda z} + e^{-\mu z})$.

Dans le cas $\lambda = \mu$, on a $f_Z(z) = \lambda\, e^{-\lambda z}$, ce qui confirme la propriété "sans mémoire" de la loi exponentielle : par exemple, si les durées de fonctionnement sans pannes de deux machines sont distribuées suivant une même loi exponentielle de paramètre λ, alors le temps séparant deux pannes est également distribué suivant cette même loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 4 :

Je dispose de trois clés, appelées V, M et B. Je place chacune dans l'une des deux poches de ma veste de manière aléatoire et équiprobable. Lorsque je souhaite rentrer dans mon bureau, je cherche la clé B, et je commence toujours par chercher dans la poche droite. Si cette poche n'est pas vide, à chaque essai, je ne sors qu'une seule clé, jusqu'à ce que je trouve la clé B, ou bien que la poche soit vide (il me faut également faire un essai pour m'apercevoir que la poche est vide). Si la clé B ne se trouve pas dans la poche droite, je continue ma recherche dans la poche gauche.

Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour trouver la clé B ?

Justifier, de manière qualitative, pourquoi l'espérance mathématique du nombre d'essais reste la même si la première poche dans laquelle je recherche la clé B est choisie au hasard.

Solution :
Les répartitions des trois clés dans les deux poches sont équiprobables, et donc de probabilités 1/8. La distribution de la variable aléatoire X représentant le nombre d'essais nécessaires pour trouver la clé B est donnée dans le tableau ci-dessous :

répartitions	**P** ($X = i$ | répartition)				**P** ($X = i \cap$ répartition)			
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
($\varnothing$, MVB)	1/3	2/3×1 /2	2/3×1 /2	0	1/24	1/24	1/24	0
(M , VB)	1/2	1/2	0	0	1/16	1/16	0	0
(V , MB)	1/2	1/2	0	0	1/16	1/16	0	0
(B , MV)	0	0	0	1	0	0	0	1/8
(MV , B)	1	0	0	0	1/8	0	0	0
(VB , M)	0	0	1/2	1/2	0	0	1/16	1/16
(MB , V)	0	0	1/2	1/2	0	0	1/16	1/16
(MVB , $\varnothing$)	0	1/3	2/3×1 /2	2/3×1 /2	0	1/24	1/24	1/24
				P ($X = i$) $\rightarrow$	7/24	5/24	5/24	7/24

D'où **E** [X] = (7 + 5×2 + 5×3 + 7×4) / 24 = 60 / 24 = 2.5.
E [X] reste la même si la première poche dans laquelle je recherche la clé B est choisie au hasard puisque les répartitions entre les deux poches sont symétriques et équiprobables.

Exercice 5 :

Soit $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
Calculer **P** ($X = -Y$).

Solution :
Soit Δ la droite d'équation $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$.
Alors **P** ($X = -Y$) $\iint_{\Delta} f(x,y)\, dx\, dy \ = \ \lim_{x\infty} \int_{-x}^{+x}\int_{-x}^{-x} f(x,y)\, dy\, dx \ = 0.$