ISIMA 1ère année

jeudi 16 janvier 2003
Durée : 2 heures
Documents autorisés

PROBABILITES

Exercice 1 :

1°) Montrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2°) Soit D_1 et D_2 deux incidents pouvant provoquer une panne d'une machine.
On sait que :

- les occurrences de ces incidents sont équiprobables, de probabilité p ;
- les occurrences de ces incidents sont indépendantes ;
- si les deux incidents de produisent de manière conjointe, alors la machine tombe en panne ;
- si un seul des deux incidents se produit, la machine ne tombe en panne qu'une fois sur deux.

Sachant qu'au moins l'un des deux incidents s'est produit, quelle est, en fonction de p, la probabilité pour que la machine tombe en panne ?

Solution :

1°) On a $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \overline{B})$

$$\Rightarrow \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(\overline{B}),$$

donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

2°) Soit P l'événement "la machine tombe en panne".

$$\mathbf{P}(P \mid D_1 \cup D_2) = \frac{\mathbf{P}\left[P \cap (D_1 \cup D_2)\right]}{\mathbf{P}(D_1 \cup D_2)} = \frac{\mathbf{P}\left[P \cap \left((D_1 \cap \overline{D}_2) \cup (\overline{D}_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap D_2)\right)\right]}{\mathbf{P}(D_1 \cup D_2)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}\left[(P \cap D_1 \cap \overline{D}_2) \cup (P \cap \overline{D}_1 \cap D_2) \cup (P \cap D_1 \cap D_2)\right]}{\mathbf{P}(D_1 \cup D_2)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(P \cap D_1 \cap \overline{D}_2) + \mathbf{P}(P \cap \overline{D}_1 \cap D_2) + \mathbf{P}(P \cap D_1 \cap D_2)}{\mathbf{P}(D_1 \cup D_2)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(P \mid D_1 \cap \overline{D}_2) \times \mathbf{P}(D_1 \cap \overline{D}_2) + \mathbf{P}(P \mid \overline{D}_1 \cap D_2) \times \mathbf{P}(\overline{D}_1 \cap D_2) + \mathbf{P}(P \mid D_1 \cap D_2) \times \mathbf{P}(D_1 \cap D_2)}{\mathbf{P}(D_1) + \mathbf{P}(D_2) + \mathbf{P}(D_1 \cap D_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}p(1-p) + \frac{1}{2}p(1-p) + p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2-p}$$

Exercice 2 :

Dans une urne, il y a N boules dont b bleues et r roses. On pose $p = \dfrac{b}{N}$ et $q = 1 - p$.

1°) On effectue dans cette urne des tirages successifs, avec remise, jusqu'à obtenir une boule bleue. Soit X_1 la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de tirages nécessaires.

Déterminer la loi de X_1.

2°) On répète k fois l'opération décrite ci-dessus, c'est-à-dire que l'on effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on ait obtenu k boules bleues (que l'on remet également dans l'urne). Soit X_k la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X_k.

<u>Solution</u> :
1°) $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et $\mathbf{P}(X_1 = n) = q^{n-1}\,p$.
2°) $X_k(\Omega) = \mathbb{N}_k = \mathbb{N} - \{0, \ldots, k-1\} = \{k+n, n \in \mathbb{N}\}$.
Soit B_n l'événement "la $n^{\text{ième}}$ boule est bleue".
On a $\mathbf{P}(X_k = k+n) = \mathbf{P}(B_{k+n} \cap E)$
où E est l'événement "en $k+n-1$ tirages il est sorti $k-1$ boules bleues.
Donc $\mathbf{P}(E) = C_{k+n-1}^{k-1}\, q^n\, p^{k-1}$, où C_{k+n-1}^{k-1} est le nombre de façons d'obtenir $k-1$ boules bleues en $k+n-1$ tirages.
Or, les tirages étant indépendants, $\mathbf{P}(B_{k+n} \mid E) = \mathbf{P}(B_{k+n}) = p$,
donc $\mathbf{P}(B_{k+n} \cap E) = \mathbf{P}(B_{k+n} \mid E) \times \mathbf{P}(E) = C_{k+n-1}^{k-1}\, q^n\, p^k$.

<u>Exercice 3</u> :
Etant donnée une variable aléatoire X, soient les variables aléatoires :

$$Y = |X-3| \text{ et } Z = |Y-2|.$$

Déterminer les distributions de Y et de Z dans les deux cas suivants :
1°) X est une loi continue uniforme sur $[0\,;6]$;
2°) X est une loi discrète uniforme sur $\{0, \ldots, 6\}$;
<u>Solution</u> :
1°) On a $X(\Omega) = [0\,;6]$, donc $Y(\Omega) = [0\,;3]$, et

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbf{P}(Y \le y) = \mathbf{P}(|X-3| \le y) = \mathbf{P}(-y \le X-3 \le y) = \mathbf{P}(3-y \le X \le 3+y) \\ &= F_X(3+y) - F_X(3-y), \end{aligned}$$

donc $f_Y(y) = f_X(3+y) + f_X(3-y)$,
or $\forall x \in [0\,;6]$, $f_X(x) = \frac{1}{6}$, et comme $\forall y \in [0\,;3]$, $3+y \in [0\,;6]$ et $3-y \in [0\,;6]$, on a $f_Y(y) = \frac{1}{3}$.
Ensuite, $(Y-2)(\Omega) = [-2\,;1]$, donc $Z(\Omega) = [0\,;2]$, et

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbf{P}(Z \le z) = \mathbf{P}(|Y-2| \le z) = \mathbf{P}(-z \le Y-2 \le z) = \mathbf{P}(2-z \le Y \le 2+z) \\ &= F_Y(2+z) - F_Y(2-z), \end{aligned}$$

donc $f_Z(z) = f_Y(2+z) + f_Y(2-z)$.
Comme $\forall z \in [0\,;1]$, $2+z \in [0\,;3]$ et $2-z \in [0\,;3]$, on a $f_Z(z) = \frac{2}{3}$,
et $\forall z \in [1\,;2]$, $2+z \notin [0\,;3]$ et $2-z \in [0\,;3]$, on a $f_Z(z) = \frac{1}{3}$.
2°) On a $X(\Omega) = \{0, \ldots, 6\}$, donc $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, et
$\mathbf{P}(Y=0) = \mathbf{P}(X=3) = \frac{1}{7}$; $\mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(X=2 \text{ ou } X=4) = \frac{2}{7}$;
$\mathbf{P}(Y=2) = \mathbf{P}(X=1 \text{ ou } X=5) = \frac{2}{7}$; $\mathbf{P}(Y=3) = \mathbf{P}(X=0 \text{ ou } X=6) = \frac{2}{7}$;

Ensuite, $(Y-2)(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1\}$, donc $Z(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, et

$\mathbf{P}(Z=0) = \mathbf{P}(Y=2) = \frac{2}{7}$; $\mathbf{P}(Z=1) = \mathbf{P}(Y=3 \text{ ou } Y=1) = \frac{4}{7}$;

$\mathbf{P}(Z=2) = \mathbf{P}(Y=0) = \frac{1}{7}$.

<u>Exercice 4</u> :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont les lois sont respectivement données par :

$$X(\Omega) = I\!R \text{ et } f_X(x) = \frac{e^{-|x|}}{2} \ ;$$

$$X(\Omega) = [-a\ ;\ a] \text{ et } f_Y(y) = \frac{1}{2a} .$$

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

<u>Solution</u> :

On a $Z(\Omega) = I\!R$, et $f_Z(z) = \int_{D_z} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx$,

avec $D_z = \{ z - y ,\ y \in [-a\ ;\ a] \} = [z-a\ ;\ z+a]$.

Donc $f_Z(z) = \frac{1}{2a}\int_{z-a}^{z+a} f_X(x)\, dx$.

Si $z \in]-\infty\ ;\ -a]$, $z + a < 0$, et donc $f_Z(z) = \frac{1}{4a}\int_{z-a}^{z+a} e^x\, dx = \frac{e^{z+a} - e^{z-a}}{4a}$;

Si $z \in]-a\ ;\ a]$, $f_Z(z) = \frac{1}{4a}\left(\int_{z-a}^{0} e^x\, dx - \int_{0}^{z+a} e^{-x}\, dx\right) = \frac{1 - e^{z-a} + 1 - e^{-z-a}}{4a}$

$$= \frac{2 - e^{z-a} - e^{-z-a}}{4a} ;$$

Si $z \in]\ a\ ;\ +\infty]$, $z + a > 0$, et donc $f_Z(z) = \frac{1}{4a}\int_{z-a}^{z+a} e^{-x}\, dx = \frac{e^{-z+a} - e^{-z-a}}{4a}$.