

Partiel de probabilités

Durée : 2 heures - Documents de cours autorisés

**Problème 1**

On lance deux dés  $D_1$  et  $D_2$  parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note :

- $X_1$  le numéro obtenu en lançant le dé  $D_1$ ,
- $X_2$  le numéro obtenu en lançant le dé  $D_2$ ,
- $S$  la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros obtenus,
- $P$  la variable aléatoire égale au numéro le plus grand obtenu,
- $M$  la variable aléatoire égale au numéro le plus petit obtenu.

1. Calculez l'espérance de  $X_1$  et l'espérance de  $X_2$ .

Quelle relation existe-t-il entre  $X_1$ ,  $X_2$  et  $S$ ? Quelle est l'espérance de  $S$ ?

2. Déterminez la loi de probabilité de  $P$ . Pour cela, on peut s'aider du tableau suivant en le complétant avec les valeurs que prend la variable  $P$ . Calculer  $E[P]$ .

Résultat du dé  $D_1$

		1	2	3	4	5	6
1							
2							
Résultat du dé $D_2$	3						
4							
5							
6							

3. Quelle relation simple a-t-on entre  $M$ ,  $P$  et  $S$  ?

4. Quelle est l'espérance de  $M$ ?

5. Déterminez la loi de probabilité de  $M$ . Retrouvez alors le résultat précédent.

6. Déterminez la loi de probabilité de S. On présentera les résultats sous forme de tableau. Retrouvez alors directement l'espérance de S.

**Problème 2**

Soient X et Y deux variables aléatoires continues quelconques.

Calculer  $E[X+Y]$ .

**Problème 3**

On effectue une expérimentation sur le comportement des rats, consistant à les faire choisir entre deux portes A et B. Si le rat choisit la porte A, il reçoit une décharge électrique et la porte reste fermée ; s'il choisit la porte B, elle s'ouvre et le rat sort.

On constate expérimentalement qu'il y a deux types de rats : la probabilité conditionnelle pour qu'un rat sorte par la porte B au  $k^{ième}$  essai, sachant qu'il a échoué  $(k-1)$  fois à la porte A, est  $p_k=0.5$  pour les rats de type I (rats sans mémoire) et est  $q_k = k/(k+1)$  pour les rats de type II (rats avec mémoire)

1. Calculer, pour le type I et pour le type II, les probabilités  $P_n$  et  $Q_n$  qu'un rat sorte au  $n^{ième}$  essai.
2. On choisit au hasard un rat parmi une population contenant 60% de rats de type I et 40% de rats de type II. Calculer la probabilité conditionnelle que le rat soit de type II sachant qu'il est sorti au  $n^{ième}$  essai. Faire les calculs pour les valeurs suivantes de n : 1, 2, 3, 4.

**Problème 4**

On suppose que les n noeuds des réseaux série et parallèle de la figure tombent en panne après un temps exponentiellement distribué de paramètre  $\mu$ . Les noeuds sont supposés indépendants. Pour chacun de ces réseaux, calculer la distribution du temps de fonctionnement et sa moyenne. Que peut-on dire quand n devient grand?

