

ISIMA

Première année

Examen de statistiques et probabilités

Durée : 2 heures. Documents de cours et calculatrices autorisées.

Exercice 1 - Souhaitant simuler une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$, un informaticien programme une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,05$.

- (a) Quelle valeur doit-il prendre pour n ?
- (b) Pour vérifier, il simule 500 tirages selon la loi programmée et obtient :

valeur :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
effectif :	1	19	49	68	85	85	83	59	27	10	7	5	1	1

Tester au seuil de confiance de 95% l'hypothèse que cet échantillon suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

- (c) Donner une estimation de la moyenne et de la variance de la population dont cet échantillon est extrait. On rappelle que, si $\chi^2(n)$ désigne une variable aléatoire suivant une loi du chi-2 à n degrés de liberté avec $n \geq 100$, on peut considérer que $\sqrt{2} \cdot \chi^2(n) - \sqrt{2 \cdot n - 1}$ suit une loi normale centrée réduite.
- (d) Donner un intervalle de confiance au seuil de 95% de la moyenne et de la variance de la population dont cet échantillon est extrait.

Nota bene : on précisera soigneusement les hypothèses faites pour répondre aux questions ci-dessus.

Exercice 2 - On dispose d'un échantillon aléatoire simple (x_1, x_2, \dots, x_n) de taille n qui suit une loi de densité $f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot \exp(-\lambda \cdot |x|)$. Déterminer un estimateur du maximum de vraisemblance pour λ .

Exercice 3 - Deux échantillons extraits de deux populations différentes ayant fourni les résultats suivants, on souhaite tester l'hypothèse selon laquelle ces populations ont même moyenne :

	échantillon 1	échantillon 2
taille de l'échantillon	50	120
moyenne de l'échantillon	4,91	5,10
écart-type de l'échantillon	2,15	2,12

- (a) Quelles sont les hypothèses nécessaires pour effectuer ce test?
- (b) Effectuer le(s) test(s) nécessaire(s), au seuil de confiance 0,95, en supposant ces hypothèses satisfaites.

Exercice 4 - On a lancé une pièce de monnaie dont on soupçonne qu'elle est truquée. On a obtenu, sur 200 lancers, 119 fois "face". On souhaite tester, au seuil de risque de 5% l'hypothèse selon laquelle la probabilité d'obtenir "face" vaut 0,5 contre l'hypothèse selon laquelle elle vaut 0,6.

- (a) Préciser la méthode utilisée et calculer la probabilité de commettre une erreur de seconde espèce.
- (b) Effectuer le test et conclure.