ISIMA 1ère année
Vendredi 2 Septembre 2005
Durée : 1 heure
Documents autorisés

PROBABILITES

Problème 1

On considère N urnes, numérotées de 1 à N, contenant chacune M boules. Les urnes numérotées de 1 à N–1 contiennent chacune B boules blanches et R boules rouges, avec $B + R = M$. L'urne numérotée N contient, quant à elle, M boules rouges.

Une urne est choisie au hasard, uniformément entre 1 et N. On effectue k tirage(s) dans cette urne et l'on obtient k boules rouges ($k \geq 1$).

Dans les deux cas de tirages avec remise, et sans remise, donner, en fonction de N, M, R et k, la probabilité pour que ces tirages aient été effectués dans l'urne N.

Problème 2

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par :

$$X(\Omega) = \{ \tfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \}, \text{ et } \mathbf{P}\left(X = \tfrac{1}{n}\right) = K\,\alpha^n, \text{ avec } \alpha \in \,]\,0\,;1\,[\,.$$

1°) Déterminer la valeur de K.

2°) Déterminer la loi des variables aléatoires $I = \frac{1}{X}$ et $U = XI$.

3°) Déterminer la loi de $C = \frac{1}{X^2} - \frac{4}{X} + 4$.

4°) Soit Y une variable aléatoire discrète dont la loi est la même que celle de X, et indépendante de X. Déterminer la loi de $S = \frac{XY}{X+Y}$.

Problème 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.

Déterminer la distribution de $Z = |X - Y|$.

Dans le cas particulier $\lambda = \mu$, commenter le résultat.