ISIMA 1ère année — vendredi 28 août 2015

Documents et calculatrice autorisés — Durée : 2 heures

PROBABILITES

Exercice 1 :

Une exploitation minière utilise un crible pour séparer, en fonction de leur taille, des fragments solides de minerai. Les fragments de taille standard tombent dans le container n° 1, ceux qui sont trop petits dans le container n° 2, et ceux qui sont trop gros dans le container n° 3.

Il a été observé les fragments de taille standard sont deux fois plus fréquents que ceux qui sont trop petits, ces derniers étant eux mêmes deux fois plus fréquents que ceux qui sont trop gros.

1°) Déterminer la probabilité pour que les fragments aient une taille standard (respectivement trop petite, trop grosse).

2°) Quelle est la probabilité pour qu'un fragment soit trop gros s'il n'est pas de taille standard.

Exercice 2 :

Deux personnes se fixent un rendez-vous entre 17 heures et 18 heures, et décident de s'attendre jusqu'à une demi-heure au plus. Sachant que leurs instants d'arrivée sont indépendants et uniformément répartis entre 17 heures et 18 heures, le but de cet exercice est de déterminer quelle est leur probabilité de rencontre.

Soient X et Y les variables représentant les heures d'arrivée des deux personnes : X et Y sont donc des variables aléatoires indépendantes, réparties suivant une loi continue uniforme sur l'intervalle [17, 18].

1°) Déterminer la loi de $-Y$.

2°) Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

3°) Exprimer la probabilité de rencontre en utilisant la variable Z et calculer cette probabilité.

Exercice 3 :

Soit $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire de densité $f_V(x,y) = k\,(x+y)$ sur le domaine

$$\mathbf{D} = \{\ (x,y) \in I\!R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\ \}.$$

1°) Déterminer la valeur de k.

2°) Déterminer les densités marginales des composantes X et Y.

3°) Calculer $\mathbf{cov}(X,Y)$.

4°) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 4 :

On s'intéresse au nombre N de visiteurs de la tour Eiffel en une journée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ_0 s'il ne pleut pas, et $\lambda_1 \neq \lambda_0$ s'il pleut. On note p la probabilité pour qu'il pleuve.

1°) On modélise la météo avec une variable M distribuée suivant une loi de Bernoulli de paramètre p : $M = 0$ s'il ne pleut pas, et $M = 1$ s'il pleut.

a) Quelle est la loi de la variable conditionnelle $N \mid M = 0$? $N \mid M = 1$?

b) En déduire la loi de N.

2°) Calculer $\mathbf{E}[N]$, $\mathbf{E}[N^2]$, et $\mathbf{V}[N]$.

3°) En déduire que N ne suit pas une loi de Poisson.