

**PROGRAMMATION FONCTIONNELLE**

- Il est permis d'écrire des fonctions auxiliaires.
- Penser à expliquer le principe de vos fonctions lorsque celui-ci ne découle pas immédiatement de la lecture de celles-ci.

**PREMIERE PARTIE :**

Un espace plan rectangulaire est représenté par une grille subdivisée en cellules carrées contenant chacune un certain nombre d'éléments. L'objet de ce problème est de déterminer, pour chaque cellule, le nombre total d'éléments dans les cellules voisines.

Pour une grille  $G$  ayant  $n$  lignes et  $m$  colonnes,  $G_{ij}$  désigne le nombre d'éléments dans la cellule de  $G$  en  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne si  $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ , et  $G_{ij} = 0$  sinon (en particulier pour  $i \in \{0, n+1\}$  ou  $j \in \{0, m+1\}$ , c'est-à-dire à l'extérieur de  $G$ ).

Le résultat peut donc être représenté par une grille  $G'$  de taille identique à  $G$ , et telle que :

$$G'_{ij} = \left( \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} G_{kl} \right) - G_{ij}.$$

Par exemple, pour la grille  $G$  suivante

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 3 | 1 | 7 |
| 5 | 0 | 4 | 5 | 8 |
| 3 | 3 | 5 | 1 | 5 |
| 9 | 2 | 7 | 3 | 4 |

la grille  $G'$  obtenue est :

|   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|----|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 14 |
| 1 | 6 | 6 | 7 |    |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 19 |
| 6 | 3 | 4 | 4 |    |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 21 |
| 9 | 5 | 5 | 1 |    |
| 8 | 2 | 1 | 2 | 9  |
|   | 7 | 4 | 2 |    |

Une grille est représentée par une liste de sous-listes, chaque sous-liste représentant une ligne de la grille. Par exemple, la grille  $G$  est représentée par la liste  $G$  ci-dessous :

$$((4\ 6\ 3\ 1\ 7)\ (5\ 0\ 4\ 5\ 8)\ (3\ 3\ 5\ 1\ 5)\ (9\ 2\ 7\ 3\ 4)),$$

$G_{ij}$  étant le  $j^{\text{ème}}$  élément de la  $i^{\text{ème}}$  sous-liste de  $G$ .

Il faut donc écrire une fonction Scheme `nbvoisins` ayant comme argument une liste  $G$  représentant une grille  $G$ , et retournant une liste représentant la grille contenant le nombre total d'éléments dans les cellules voisines de chaque cellule de  $G$ .

Par exemple, l'évaluation de l'expression `(nbvoisins G)` dans un environnement où  $G$  s'évalue à la liste donnée en exemple ci-dessus doit retourner :

$$((11\ 16\ 16\ 27\ 14)\ (16\ 33\ 24\ 34\ 19)\ (19\ 35\ 25\ 41\ 21)\ (8\ 27\ 14\ 22\ 9)).$$

La méthode proposée est de retourner une grille  $G''$  telle que  $G''_{ij} = \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} G_{kl}$ , et de "retrancher"  $G$  à  $G''$ .

Pour obtenir  $G''$ , on peut effectuer le calcul en dimension 1 sur chaque ligne de  $G$  et réappliquer ce même calcul sur les colonnes du résultat. Effectuer le calcul en dimension 1 revient à appliquer à

chaque ligne  $G_i = (G_{ij})_{1 \leq j \leq m}$  de  $G$  une fonction qui retourne la liste  $\left( \sum_{l=j-1}^{j+1} G_{il} \right)_{1 \leq j \leq m}$ .

Par exemple l'évaluation de cette fonction à la liste (4 6 3 1 7) doit retourner (10 13 10 11 8).

Avec la grille  $G$  donnée en exemple, l'application de ce calcul en dimension 1 à toutes les lignes de  $G$  donne la grille suivante :

|   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|----|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 8  |
| 0 | 3 | 0 | 1 |    |
| 5 | 9 | 9 | 1 | 13 |
| 6 | 1 | 9 | 1 | 6  |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 7  |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 21 |
| 5 | 2 | 9 | 8 |    |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 27 |
| 1 | 3 | 8 | 9 |    |
| 2 | 3 | 3 | 4 | 26 |
| 2 | 8 | 0 | 2 |    |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 13 |
| 7 | 9 | 1 | 5 |    |

Si on réapplique ce même calcul à chaque colonne de la grille ci-dessus, on obtient alors :

et si l'on “retranche” la grille  $G$  à la grille ci-dessus, on obtient effectivement la grille  $G'$  souhaitée.

**Question 1 : Ecrire la fonction effectuant le calcul en dimension 1.**

Ecrire une fonction nbv1 ayant comme argument une liste non vide  $L = (L_j)_{1 \leq j \leq m}$  et telle que

l'évaluation de l'expression (nbv1 L) retourne une liste  $(L'_j)_{1 \leq j \leq m}$  définie par  $L'_j = \left( \sum_{l=j-1}^{j+1} L_l \right)_{1 \leq j \leq m}$ ,

avec  $L_0 = L_{m+1} = 0$ . Par exemple l'évaluation de l'expression (nbv1 '(4 6 3 1 7)) doit retourner (10 13 10 11 8).

Indication : pour l'exemple ci-dessus le résultat peut être obtenu en “additionnant” les listes (4 6 3 1 7), (0 4 6 3 1) et (6 3 1 7 0).

**Question 2 : Ecrire la fonction qui compose l'application de nbv1 sur les lignes et sur les colonnes de G.**

Ecrire une fonction nbv2 ayant comme argument une liste G représentant une grille  $G = (G_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ ,

et telle que l'évaluation de l'expression (nbv2 G) retourne une liste représentant une grille

$(G''_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  définie par : 
$$G''_{ij} = \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} G_{kl}.$$

Par exemple, l'évaluation de l'expression

(nbv2 '( (4 6 3 1 7) (5 0 4 5 8) (3 3 5 1 5) (9 2 7 3 4) ))

doit retourner la liste

((15 22 19 28 21) (21 33 28 39 27) (22 38 30 42 26) (17 29 21 25 13)).

**Indication** : pour appliquer nbv1 sur les colonnes d'une grille, on peut l'appliquer sur les lignes de la grille transposée, et transposer le résultat.

**Question 3 : Ecrire la fonction nbvoisins en retranchant G à G'' et en utilisant nbv2.**

1°) Ecrire une fonction map2 ayant trois arguments :

- une fonction f de deux arguments ;

- deux listes G1 et G2 représentant deux grilles  $G^1 = (G_{ij}^1)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  et  $G^2 = (G_{ij}^2)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  ;

et telle que l'évaluation de l'expression (map2 f G1 G2) retourne une liste représentant une grille

$G = (G_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}, G_{ij} = f(G_{ij}^1, G_{ij}^2).$$

2°) Ecrire la fonction nbvoisins en utilisant les fonctions map2 et nbv2.

**DEUXIEME PARTIE :**

Si l'espace plan rectangulaire considéré dans ce problème est une partie d'un environnement considéré comme infini, la prise en compte des interactions entre cet espace et son environnement (par exemple pour que toutes les cellules aient 8 voisines) peut être traitée en considérant l'environnement comme la répétition périodique de l'espace rectangulaire (ce qui revient à assimiler l'environnement plan infini à la surface finie d'un tore, obtenu en collant respectivement les bords nord et sud, et est et ouest du rectangle).

Dans le cadre du problème traité ici, puisque l'on ne s'intéresse qu'aux voisines immédiates, cela revient à entourer la grille par une marge de largeur égale à une cellule. Avec la grille prise en exemple dans la première partie, on obtient la grille ci-contre :

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 | 7 | 3 | 4 | 9 |
| 7 | 4 | 6 | 3 | 1 | 7 | 4 |
| 8 | 5 | 0 | 4 | 5 | 8 | 5 |
| 5 | 3 | 3 | 5 | 1 | 5 | 3 |
| 4 | 9 | 2 | 7 | 3 | 4 | 9 |
| 7 | 4 | 6 | 3 | 1 | 7 | 4 |

Pour déterminer le nombre total d'éléments dans les cellules voisines en prenant en compte l'environnement, il est possible d'appliquer la fonction nbvoisins sur cette grille étendue, et de supprimer les marges pour obtenir le résultat.

**Question 4 : Ecrire une fonction retournant la grille étendue.**

Ecrire une fonction `etendre` ayant comme argument une liste `G` représentant une grille

$G = (G_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ , et telle que l'évaluation de l'expression `(etendre G)` retourne une liste

représentant une grille  $(G'_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n+1 \\ 0 \leq j \leq m+1}}$  définie par :

$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ ,  $G'_{ij} = G_{ij}$ ,  $G'_{i0} = G_{im}$ ,  $G'_{i,m+1} = G_{i1}$ ,  $G'_{0j} = G_{nj}$  et  $G'_{n+1,j} = G_{1j}$   
et  $G'_{00} = G_{nm}$ ,  $G'_{0,m+1} = G_{n1}$ ,  $G'_{n+1,0} = G_{1m}$ ,  $G'_{n+1,m+1} = G_{11}$ .

Par exemple, l'évaluation de l'expression

`(etendre '((4 6 3 1 7) (5 0 4 5 8) (3 3 5 1 5) (9 2 7 3 4)))`

doit retourner la liste

`((4 9 2 7 3 4 9) (7 4 6 3 1 7 4) (8 5 0 4 5 8 5)  
(5 3 3 5 1 5 3) (4 9 2 7 3 4 9) (7 4 6 3 1 7 4)).`

**Question 5 : Ecrire une fonction retournant la grille sans sa marge.**

Ecrire une fonction `emarger` ayant comme argument une liste `G` représentant une grille

$G = (G_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n+1 \\ 0 \leq j \leq m+1}}$ , et telle que l'évaluation de l'expression `(emarger G)` retourne une liste

représentant une grille  $(G'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}, G'_{ij} = G_{ij}.$$

Par exemple, l'évaluation de l'expression

`(emarger '((4 9 2 7 3 4 9) (7 4 6 3 1 7 4) (8 5 0 4 5 8 5)  
(5 3 3 5 1 5 3) (4 9 2 7 3 4 9) (7 4 6 3 1 7 4)))`

doit retourner la liste

`((4 6 3 1 7) (5 0 4 5 8) (3 3 5 1 5) (9 2 7 3 4)).`

**Question 6 : Ecrire une fonction retournant le nombre total d'éléments dans les cellules voisines en prenant en compte l'environnement.**

Ecrire une fonction `nbvoisins_env` ayant comme argument une liste `G` représentant une grille

$G = (G_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ , et telle que l'évaluation de l'expression `(nbvoisins_env G)` retourne une liste

représentant la grille contenant le nombre total d'éléments dans les cellules voisines de chaque cellule de `G` en prenant en compte l'environnement de `G`.