Examen de Programmation Linéaire

Lundi 20/06/11 - durée 2 h

documents de cours autorisés, calculatrices programmables interdites

---

Chaque exercice est à rendre sur une feuille séparée.

Exercice I (PL, TEC, analyse de sensibilité) : une usine de découpage de cochons vend exactement par jour 480 jambons, 400 morceaux de lard et 230 jarrets. Chacun de ces produits peut être soit vendu frais, soit fumé pour une plus longue conservation. Le nombre total de morceaux pouvant être fumés en heures normales pendant une journée est de 420. Il est possible de fumer jusqu'à 250 produits en plus en heures supplémentaires. Les profits nets sont les suivants :

	Frais	Fumé normal	Fumé en heure supplémentaire
Jambon	8€	14€	11€
Lard	4€	12€	7€
Jarret	4€	13€	9€

1. Formuler le problème de maximisation du profit de l'entreprise sous la forme d'un programme linéaire.
On donne maintenant le programme linéaire suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{lccccccl}
\max & 6x_1 & +3x_2 & +8x_3 & +3x_4 & +9x_5 & +5x_6 & \\
\text{s.t.} & & & & & & & \\
& x_1 & +x_2 & & & & & \leq 480 \\
& & & x_3 & +x_4 & & & \leq 400 \\
& & & & & x_5 & +x_6 & \leq 230 \\
& x_1 & & +x_3 & & +x_5 & & \leq 420 \\
& & x_2 & & +x_4 & & +x_6 & \leq 250 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0.
\end{array}\right.$$

2. Montrer que la formulation de la première question se ramène à (P). Étant donnée une solution $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ donnez le nombre de jambons vendus frais, fumés en heures normales et fumés en heure supplémentaires.
3. Soit $x^* = (0, 40, 400, 0, 20, 210)$. x^* est-elle solution optimale du problème (P) ? Si oui, quel sera le bénéfice de l'entreprise ?
4. Supposons que les prix du marché changent de manière importante. Le prix des jarrets vendus frais passe de 4 € à t €. Quelle est la valeur minimale de t pour qu'il devienne intéressant de vendre des jarrets frais ?
Indication :

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice II (PL) : soit (P) le programme linéaire suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll}
\max & 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\
\text{s.t.} & \\
& 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 40 \\
& 9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 35 \\
& 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 51 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{array}\right.$$

1. Montrer qu'une seule des solutions suivantes est réalisable de base pour (P). Justifier chaque cas.
   (a) $x^1 = (\frac{5}{3}, 3, 0)$
   (b) $x^2 = (\frac{51}{7}, 0, 0)$
   (c) $x^3 = (4, 2, 6)$
2. En partant de la solution obtenue en 1), optimiser le programme linéaire (P). Écrire le dual (D) de (P).
3. Sans aucun calcul, utiliser les questions précédentes pour obtenir la solution du dual (D).
4. On suppose maintenant que le sens de l'inégalité dans la 2ème contrainte de (P) est inversé, c'est-à-dire qu'on remplace $9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 35$ par $9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 35$. Montrer en utilisant la phase I du simplexe que le nouveau programme linéaire est irréalisable.

Exercice III (modélisation, reformulation et robustesse) : on considère une distillerie spécialisée dans la fabrication de rhum. Pour produire une unité de rhum, elle a besoin de 10 unités de canne. La canne est achetée au prix unitaire $c_1 = 5$. Elle est entreposée en vrac dans un hangar de capacité $Q_1 = 100$. La distillerie planifie sa production sur un horizon de $T = 10$ périodes, une période correspondant à une semaine. Pour chaque période $t = 1 \ldots T$ son carnet de commande est de d^t unités de rhum. Le coût unitaire de production est $c_F = 15$. La distillerie peut anticiper les demandes et stocker le rhum pour les périodes suivantes. La capacité de stockage de la zone d'expédition est $Q_F = 50$.

1. Formuler la planification de l'achat, du stockage et de la production de manière à minimiser les coûts totaux.
2. Une formulation alternative remplace la production et l'achat par un seul type de variables : la quantité $x^{t't}$ de rhum à produire à la période t en achetant de la canne à la période $t' \leq t$. Le coût unitaire $c^{t't}$ associé intègre le coût unitaire de production et le coût d'achat de la quantité de canne correspondant.
   (a) donner la valeur de $c^{t't}$
   (b) reformuler le problème en utilisant ces variables et les variables de stock
3. L'alcool présent dans la canne s'évapore au cours du temps. D'une période à l'autre, elle perd 10 % de sa teneur en alcool. On simplifie en disant que 10 % de la quantité de canne stockée est perdue.
   (a) modifier la(les) contrainte(s) associée(s) dans le premier modèle
   (b) modifier le second modèle (coût unitaire et contrainte de stock de canne)
4. Le taux d'évaporation dépend des conditions climatiques. Plus il fait chaud, plus le taux d'évaporation est important. On ne connaît pas a priori les conditions climatiques pour chaque période. Pour chaque période t on définit le temps comme une variable aléatoire $\zeta^t \in \{\text{Froid}, \text{Normal}, \text{Chaud}\}$ avec un taux d'évaporation $e_1 \in \{8\%, 10\%, 15\%\}$ respectivement. Un scénario est un vecteur contenant la réalisation des T variables aléatoires.
   (a) À quel scénario correspond le problème initial ?
   (b) Combien de scénarios possibles a-t-on ?
   On veut une solution robuste, *i.e.* qui soit valide sur plusieurs scénarios. Il faut intégrer tous les scénarios considérés dans le modèle. Ils n'interviennent que sur l'évolution du stock de canne. On indexe donc les variables de stock de canne sur les périodes et les scénarios, les entrées et sorties du stock restent les variables d'achat et de production
   (c) Soit $s = 1 \ldots S$ un scénario, réécrire les contraintes d'évolution du stock de canne pour s dans le modèle initial.