ISIMA 1ère année

Examen de Programmation linéaire
Septembre 2012 Durée : 2 heures

Documents de cours autorisés **Calculatrices programmables non autorisées**

EXERCICE 1

Le domaine du plan $\mathcal{D}$ est défini par le système linéaire ci-dessous.

Max $z_\alpha = x_1 + \alpha x_2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 80 & (1)\\ x_1 - x_2 &\leq 40 & (2)\\ -x_1 + 3x_2 &\leq 120 & (3)\\ 2x_1 + 5x_2 &\geq 100 & (4)\\ x_1 \geq 0 \qquad & x_2 \geq 0 & (5) \end{aligned}$$

On considère les fonctions objectifs $z_\alpha(x_1, x_2) = x_1 + \alpha \times x_2$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\mathbb{P}_\alpha$ le programme linéaire

$$\mathbb{P}_\alpha \begin{cases} \text{Maximiser} & z_\alpha(x_1, x_2) \\ \text{s.t.} & (x_1, x_2) \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

1. Représenter l'ensemble $\mathcal{D}$ des solutions réalisables.
2. Pour $z_5(x_1, x_2) = x_1 + 5 \times x_2$, quel est le meilleur point M_5 de $\mathcal{D}$? Vérifier l'optimalité en utilisant les vecteurs orthogonaux aux contraintes qui déterminent M_5.
3. Ecrire le dual $\mathbb{D}_\alpha$ du programme $\mathbb{P}_\alpha$.
4. En appliquant le théorème des écarts complémentaires, trouver la solution duale optimale pour $\alpha = 5$.
5. Montrer que le point $N(0, 40)$ ne sera jamais solution optimale d'un $\mathbb{P}_\alpha$.
6. En revanche, le point $Q(60, 20)$ peut-il être optimal pour certaines fonctions z_α ?

EXERCICE 2

Considérons le programme linéaire suivant

$$P \begin{cases} \text{maximiser} & 2x_1 & - & x_2 & + & \alpha x_3 & & \\ \text{s.t.} & 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \leq & \beta \\ & 5x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 1 \\ & -2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & & & & x_1, x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

où α et β sont deux paramètres réels quelconques. Soient x_4, x_5, x_6 les variables d'écart des première, seconde et troisième contraintes, respectivement

1. Montrer que les variables x_1, x_3, x_6 forment une base pour P.
2. Donner **l'ensemble des valeurs de** α **et** β pour lesquelles les variables x_1, x_3, x_6 ne forment pas une base réalisable pour P.

3. Donner **l'ensemble des valeurs de α et β** pour lesquelles les variables x_1, x_3, x_6 forment une base optimale pour P.

Remarque (matrice inverse) :

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 3

Considérons le programme linéaire suivant

$$Q \left\{ \begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{maximiser} & -3x_1 & - & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 6x_4 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 10 \\ & -x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & \leq & -4 \\ & & & -x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & -3 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Utiliser la méthode révisée du simplexe à deux phases pour trouver, si il en existe, une solution optimale pour le programme linéaire Q. Vous respecterez obligatoirement les règles suivantes :

1. si plusieurs variables sont candidates pour entrer en base, appliquer la règle du plus petit indice (i.e., règle de Bland) ;
2. au début de chaque itération, préciser très clairement
   - la base courante,
   - la matrice de base associée et
   - la solution de base associée ;
3. tout symbole représentant un objet mathématique utilisé (e.g., matrice, vecteur) devra avoir été introduit auparavant ;
4. à la fin de la résolution, les valeur et solution optimales trouvées, si il en existe, devront être données explicitement.

Remarque : la première phase ne devrait pas nécessiter plus de deux itérations.

EXERCICE 4

Soit $\mathbb{P}$ le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{minimiser } z = & 4x_1 & + & & & 5x_3 & & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & = & 1 \\ & -3x_1 & & & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

1. Montrez qu'il existe une base réalisable optimale évidente. Donnez la valeur et la solution optimale correspondantes. Cette solution est-elle unique ?
2. Donner le dual $\mathbb{D}$ de $\mathbb{P}$. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, donnez toutes les solutions optimales de $\mathbb{D}$.
3. On considère que le second membre des équations du problème $\mathbb{P}$ dépend d'un paramètre réel θ et passe de $(1, 2)$ à $(1-2\theta, 2-3\theta)$. Pour quelles valeurs de θ la base optimale obtenue pour le problème $\mathbb{P}$ est-elle encore valable ? Justifiez votre réponse.