Examen de Programmation Linéaire

vendredi 04/02/03 - durée 2 h

documents de cours autorisés, calculatrices interdites

Exercice I [Modélisation] : Suite à une campagne de prélèvements, une pollution a été constatée dans le lac d'une municipalité. Le lac occupe un volume de 10^6 m^3 et il présente des taux en phosphates et nitrates de 25 mg/l et 18 mg/l respectivement pour une valeur admissible maximale de 17 mg/l et 7 mg/l. Par contre, le taux de chlore est satisfaisant avec 6 mg/l pour 12 mg/l. Pour résorber la pollution, le conseil municipal envisage de faire appel à une société qui commercialise deux produits. Le produit P_1 neutralise 3 g de phosphate mais ajoute 2 g de chlore par litre tandis que le produit P_2 neutralise 1.5 g de phosphate et 1 g de nitrate mais ajoute 0.7 g de chlore par litre.

1) Modéliser le problème consistant à restaurer les normes sanitaires en perturbant le moins possible l'équilibre écologique du lac (c'est-à-dire en déversant le moins possible de produit).
2) Le modèle précédent n'est pas réaliste car il n'admet pas de solution réalisable. Proposer une reformulation dans laquelle on chercherait plutôt à violer le moins possible les normes de phosphate et de nitrate. Plus précisément, on souhaite minimiser la somme des violations des normes de phosphate de de nitrate. Ceci nécessitera sans doute une variable positive mesurant la violation de chaque norme...
3) Il faut maintenant prendre en compte l'aspect financier. Chaque litre de produit P_1 coûte 7 euros tandis que le produit P_2 coûte 5 euros le litre. Le budget "environnement" de la municipalité est de 50000 euros. L'Office des Eaux et Forêts a fixé des pénalités pour les risques écologiques. Dans cette catégorie de lacs, elle se chiffre à 7000 euros par dixième de phosphate en trop et à 10000 euros par dixième de nitrate en trop. Reformuler le problème consistant à minimiser les déversements de produit et intégrant ces nouvelles considérations
4) Après étude, le conseil municipal considère de nouvelles possibilités de traitement

   a - louer une unité mobile de pompage et traitement. L'unité a une capacité de 20 l/min. On peut lui fixer deux types de filtres. Le premier filtre élimine 90% du chlore et coûte 5000 euros par mois. Le second filtre élimine 40% de nitrate et 50% de phosphate et coûte 7000 euros par mois. On suppose que l'on ne peut choisir qu'un type de filtre, ce qui nous oblige à utiliser une variable booléenne x_p qui vaut 1 si on choisit le premier filtre et 0 si on choisit le second filtre. On suppose également que la pompe travaille toujours au maximum de sa capacité de traitement.

   b - les élus peuvent contacter les agriculteurs de la commune pour leur demander de réduire les émissions de phosphate. Pour un hectare mis en jachère, on estime la réduction en phosphate de 10 kg. Les agriculteurs étant aussi pêcheurs, ils sont prêts à appliquer cette solution contre indemnisation de 1000 euros par hectare. 50 hectares sont suceptibles d'être mis en jachère et la municipalité peut prélever une somme de 50000 euros dans le budget "agriculture".

   Prendre en compte ces nouvelles possibilités.

Exercice II [Méthode graphique] : Soit le programme linéaire suivant :

$$P(c_1, c_2) = \boxed{\begin{array}{l} \text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.c.} \\ \qquad \begin{array}{rrl} 5x_1 + & 4x_2 & \geqslant 30 \\ 2x_1 - & x_2 & \leqslant 16 \\ -x_1 + & x_2 & \leqslant 6 \\ \\ x_1 & & \geqslant 2 \\ & x_2 & \geqslant 2 \end{array} \end{array}}$$

où c_1 et c_2 sont deux paramètres réels.

1) Déterminer graphiquement les points extrêmaux du domaine réalisable.
2) Étudier les valeurs des paramètres c_1 et c_2 pour lesquelles le problème posé est borné (donner dans chaque cas les points optimaux).

Exercice III [Simplexe] : Soit le programme linéaire suivant :

$$P = \boxed{\begin{array}{lrrrl} \text{Min } z = & 3x_1 - & 2x_2 + & 2x_3 + & x_4 \\ \text{s.c.} \\ & -4x_1 + & 2x_2 - & x_3 + & x_4 \geqslant 10 \\ & x_1 & + & x_3 & \geqslant 3 \\ \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1 \geqslant 0 \ , \ x_2 \leqslant 0 \ , \ x_3 \geqslant 0 \ , \ x_4 \text{ qcq}} \end{array}}$$

1) Mettre le problème sous forme standard.
2) À l'aide du simplexe à deux phases, trouver une solution réalisable. Choisir comme variable entrante la première candidate dans l'ordre lexicographique (i.e. $x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \cdots \prec s_1 \prec s_2$).
3) On considère la solution $x = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$. À quelle base correspond-elle ? Cette base est-elle optimale ? Si oui, donner la solution duale associée, sinon poursuivre jusqu'à l'optimum.
4) Donner l'intervale de variation des ressources qui préservent l'optimalité.
5) Donner l'intervale de variation du coût de x_1 qui préserve l'optimalité.