ISIMA Première année

2014-2015

Examen de Soutien de Mathématiques
Algèbre linéaire

Documents de cours de l'année courante autorisés
Calculatrice interdite

Durée : 1h30

La présentation et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice n° 1. Mettre sous forme algébrique ($a + \ b \cdot \imath$) les nombres complexes ci-dessous :

1. $\frac{25}{3-4\cdot\imath}$;
2. $\frac{-1+7\cdot\imath}{1+\cdot\imath}$;
3. $\frac{7}{1-\cdot\imath} + \frac{-1+2\imath}{3-\imath}$.

Exercice n° 2. Trouver le nombre complexe z, sous forme trigonométrique, vérifiant :

i) $|z| = 3$;

ii) $\arg(\frac{2z}{1-\imath}) + \arg((-\sqrt{5} - \sqrt{15}\imath) \times (\sqrt{3} + \cdot\imath)) = \frac{5\pi}{4}$.

Exercice n° 3. Soit le nombre complexe $z_1 = \frac{-\sqrt{3}-\imath}{1+\imath}$.

3.1. Ecrire z_1 sous forme exponentielle.

3.2. Calculer ensuite z_1^{12}.

Exercice n° 4. Le domaine $\mathbb{D}$ est défini par les contraintes :

$$\begin{array}{rrl} -2x_1 & -x_2 & \leq -4, \quad (1)\\ 4x_1 & -3x_2 & \leq 12, \quad (2)\\ 7x_1 & +5x_2 & \leq 35, \quad (3)\\ & x_2 & \leq 5, \quad (4)\\ & x_i \geq 0 & i = 1, \ldots 2, \end{array}$$

Représenter soigneusement le domaine $\mathbb{D}$. On explicitera les étapes de contruction du domaine, en précisant les points de construction utilisés.

Exercice n° 5. Considérons l'application $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x & -2y & -6z \\ -2x & +4y & +6z \\ 2x & -2y & -4z \end{pmatrix}.$$

5.1. Montrer que f est linéaire.

5.2. Préciser $\ker f$.

5.3. Quelle est la matrice A associée à f ?

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F}$ est constituée des trois vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.4. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. On recherchera à cet effet les nouvelles coordonnées X, Y, Z d'un vecteur quelconque $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

5.5. $\mathcal{F}$ est–elle une base de $\mathbb{R}^3$?

5.6. Déterminer les nouvelles coordonnées des vecteurs de la base canonique en fonction des vecteurs u_1, u_2 et u_3.

5.7. Calculer l'image par f des vecteurs $u_i, i = 1,2,3$. Que remarquez-vous ?

5.8. En déduire la matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Exercice n° 6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{G}$ contenant les trois vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

6.1. Déterminer selon le paramètre a quand la famille $\mathcal{G}$ est libre.

6.2. Lorsque $\mathcal{G}$ est une famille liée, à quelle condition un vecteur $v = (x,y,z)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3 ?