ISIMA 1ère année

lundi 4 février 2002
Durée : 2 heures
Documents autorisés

STATISTIQUES

Exercice 1 :

La moyenne et l'écart-type des charges maximales supportées par 81 câbles sont respectivement de 11.09 tonnes et de 0.73 tonne.
Déterminer les intervalles de confiance, au niveaux de confiance de 95% et de 99%, contenant la charge maximale moyenne de tous les câbles du même type produits par l'usine.

Solution :
Il s'agit d'estimer une moyenne par intervalle de confiance, dans le cas d'un grand échantillon. En notant $\overline{X} = 11.09$, $S = 0.73$, $n = 81$, et m la moyenne à estimer, en vertu du théorème de la limite centrale, et de la convergence de l'estimateur S^2 vers la variance σ^2, on sait que $\frac{\overline{X} - m}{S}\sqrt{n-1}$ est approximativement distribuée suivant une loi gaussienne centrée réduite, d'où l'intervalle de confiance contenant m au niveau de confiance $1 - \alpha$:

$$\left[\overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}} ; \overline{X} + u_{1\text{-}\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right].$$

Pour $1 - \alpha = 95\%$, $u_{1-\alpha/2} \approx 1.96$. On obtient donc : [10.93 ; 11.25].
Pour $1 - \alpha = 99\%$, $u_{1-\alpha/2} \approx 2.58$. On obtient donc : [10.88 ; 11.30].

Exercice 2 :

La durée de vie moyenne d'un échantillon de 100 ampoules fluorescentes fabriquées par une usine est estimée à 1750 heures, avec un écart-type de 120 heures.
Si μ est la durée de vie moyenne de toutes les ampoules produites par l'usine, tester l'hypothèse $\mu = 1600$ heures contre l'hypothèse $\mu \neq 1600$ heures, aux niveaux de confiance de 95% et de 99%.

Exercice 3 :

Deux types de solutions chimiques, A et B, ont été testées pour leur pH (degré d'acidité). L'analyse de 6 solutions de type A a donné un pH moyen de 7.52, avec un écart-type (biaisé) de 0.024. L'analyse de 5 solutions de type B a donné un pH moyen de 7.49, avec un écart-type (biaisé) de 0.032.
Déterminer si, au seuil de signification de 0.05, les deux types de solutions ont des pH différents.

Exercice 4 :

On jette 250 fois en même temps 3 pièces de monnaie. On note à chaque fois le nombre de "faces" obtenu :

0 "face"	1 "face"	2 "faces"	3 "faces"
24	108	95	23

Tester, au seuil de signification de 5%, l'hypothèse selon laquelle les pièces sont bien équilibrées.

<u>Exercice 5</u> :

On considère la série statistique dont la loi de densité f_λ est :

$$f_\lambda(x) = \frac{2x}{\lambda} e^{-x^2/\lambda} \text{ si } x > 0,\ f_\lambda(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Trouver, par la méthode du maximum de vraisemblance, un estimateur de λ à partir d'un échantillon aléatoire simple de taille n.