ISIMA 1ère année. 2015-2016

**Examen de graphes** 1ère session

Documents autorisés : support de cours et notes manuscrites.

**Exercice 1 – Questions diverses (7 points).**

1. Est-ce qu'il existe un graphe non orienté à 8 sommets contenant un cycle hamiltonien et un cycle eulérien ? Si non, donnez des arguments montrant que ce n'est pas le cas. Si oui, dessinez-le et décrivez les deux cycles, eulérien et hamiltonien.
2. Dans cette question les graphes $G$ considérés sont non orientés, non pondérés et connexes. Si $G$ est un tel graphe, on note $D(G)$ son *diamètre* et $PLC(G)$ la longueur de son plus long chemin (élémentaire).
   (a) Est-ce qu'il existe un graphe $G$ avec au moins 10 sommets tel que $PLC(G) < D(G)$ ? Justifiez.
   (b) Est ce qu'il existe un graphe $G$ avec au moins 10 sommets tel que $PLC(G) \geq 100D(G)$ ? Justifiez.
3. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, non pondéré, connexe. Soit $u$ un sommet de $G$. On note $G-u$ le graphe $G$ dans lequel le sommet $u$ est supprimé (ainsi que ses arêtes). Un sommet $u$ est un *point d'articulation* de $G$ si $G-u$ n'est pas connexe. On notera $Art(G)$ le nombre de points d'articulation de $G$.
   (a) Soit $T = (V, E)$ un *arbre* quelconque à $n$ sommets. Donnez un encadrement de $Art(T)$ exprimé en fonction de $n$ et/ou de constantes (donnez simplement l'encadrement, sans justification). Dessinez deux arbres à $n = 7$ sommets, un qui atteint la 1ère borne et l'autre qui atteint la 2ème de votre encadrement (lorsque $n = 7$). Entourez en couleur les points d'articulation de ces deux arbres.
   (b) Soit $GR_{p\times q}$, avec $p \geq 3$ et $q \geq 3$, une grille (vu en TD). Que vaut $Art(GR_{p\times q})$ ? Donnez simplement le résultat, sans justification.
   (c) Soit $G$ un graphe (connexe, non orienté) et $r$ un point d'articulation de $G$. Soit $T$ un arbre obtenu en appliquant le DFS (parcours en profondeur) à partir de $r$ dans $G$. Combien $r$ a-t-il de voisins dans $T$ ? Justifiez. Donnez aussi une illustration de votre résultat sur un exemple que vous prendrez soin de choisir.

**Exercice 2 – Colorations (6 points).** Dans cet exercice les graphes manipulés sont non orientés, non pondérés (connexes ou pas). Soit $G = (V, E)$ un tel graphe. Une *coloration propre* de $G$ est la donnée d'une *couleur* à chaque sommet de $G$ de façon à ce que pour toute arête $e = uv$, les sommets $u$ et $v$ n'aient pas la même couleur. En pratique, une couleur sera représentée par un entier strictement positif. L'objectif est de trouver des colorations propres utilisant un nombre minimal de couleurs (une couleur peut être utilisée pour colorier plusieurs sommets à partir du moment où ils ne sont pas voisins). On notera $\chi(G)$ le nombre minimal de couleurs à utiliser pour avoir une coloration propre de $G$.

1. Que vaut $\chi(K_n)$ où $K_n$ est un graphe complet à $n$ sommets ? Justifiez votre réponse.
2. Que vaut $\chi(C_n)$ où $C_n$ est un cycle à $n$ sommets ? Justifiez votre réponse.
3. Soit $G$ un graphe et $D(G)$ son diamètre. Est-ce-que l'on a toujours $\chi(G) \leq 2D(G)$ ? Justifiez votre réponse.
4. Soit $G$ un graphe et $\Delta_G$ son degré maximal. Considérons l'algorithme suivant. Les $n$ sommets de $G$ sont rangés dans une liste, dans un ordre quelconque : $\mathcal{L} = u_1, \ldots, u_n$. Les couleurs sont représentées par des entiers, $1, 2, \ldots$. Les sommets sont traités les uns après les autres, dans l'ordre de la liste $\mathcal{L}$. On attribue au sommet $u_1$ la couleur 1. La règle générale de coloration est la suivante : colorier $u_i$ avec la couleur de plus petit numéro non attribuée aux voisins de $u_i$ déjà coloriés.
   (a) Appliquez cet algorithme de coloration sur le graphe de la figure 1 avec la liste $\mathcal{L} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Dessinez le graphe sur votre copie et mettez à côté de chaque sommet la couleur (son numéro) qui lui est attribuée par l'algorithme. Combien de couleurs ont été utilisées ici ? Peut-on faire mieux (utiliser moins de couleurs) ? Justifiez.

(b) Soit $G$ un graphe quelconque. Est-ce-que l'on a toujours $\chi(G) \leq \Delta_G + 1$ ? Justifiez votre réponse. Indication : pour répondre à cette question analysez le comportement de l'algorithme sur $G$ ; Lorsque le sommet $u_i$ de degré $d$ est traité, quel sera au maximum le numéro de couleur qui lui sera attribué ?

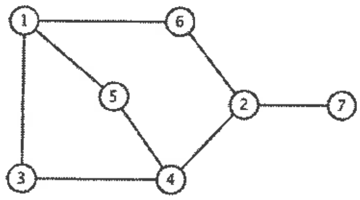


FIGURE 1 – Graphe à colorier

**Exercice 3 – Flots (7 points).**

Trois villes $J$,$K$ et $L$ sont alimentées en eau grâce à quatre réserves $A$, $B$, $C$ et $D$. Les réserves journalières sont respectivement de 15 milliers de $m^3$ pour $A$, $C$ et $D$, et seulement de 10 pour $B$. Le réseau de distribution est présenté ci-dessous (les débits sont indiqués en milliers de $m^3$ par jour). Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir pour la ville $J$ : 15 milliers de $m^3$, pour la ville $K$ : 20 et 15 pour la ville $L$.

1. Déterminer la valeur du flot maximum pouvant passer dans le réseau actuel et donner la coupe de capacité minimum correspondante. Expliquer soigneusement dans quel réseau vous appliquez l'algorithme de Ford et Fulkerson vu en cours (dessinez le réseau, sa source, son puits et les capacités) et préciser à chaque itération de l'algorithme la chaîne augmentante et la valeur d'augmentation du flot courant. Justifier comment vous obtenez la coupe.
2. La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante, aussi la communauté de communes décide-t-elle de refaire les canalisations $(A, E)$ et $(I, L)$. Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot maximum. Justifier.
3. Les travaux sont trop importants pour être fait simultanément et doivent être faits en deux tranches ; une première canalisation puis l'autre. Dans quel ordre doit-on entreprendre la réfection des deux canalisations ? Quels sont après chaque tranche de travaux les valeurs des flots optimaux ?