ISIMA 1ère année. 2014-2015

Examen de graphes 1ère session

Documents autorisés : support de cours et notes manuscrites.

Exercice 1 – Paramètres d'une famille de graphes et questions associées (9 points). On définie ici une nouvelle famille de graphes. Soit p un entier positif, $p \geq 4$. Le graphe $KC(p)$ est construit de la manière suivante :
Prendre p cycles à 4 sommets chacun que l'on note : $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Relier ensuite ces p graphes entre eux de manière cyclique de la façon suivante. Dans chacun de ces X_i choisir un sommet a_i. Ajouter une arête entre a_i et a_{i+1} pour tout $i = 1, \ldots, p-1$ pour relier X_i à X_{i+1} ; ajouter une arête entre a_p et a_1 pour relier X_p à X_1 (pour "fermer" le cycle). La figure 1 représente le graphe $KC(4)$ (pour $p = 4$ donc).

1. Déterminez les paramètres de $KC(p)$ avec $p \geq 4$ quelconque : n : son nombre de sommets, m : son nombre d'arêtes, Δ : son degré maximum, δ : son degré minimum, D : son diamètre. Justifiez vos réponses.
2. Pour quelles valeurs de $p \geq 4$, $KC(p)$ est-il un graphe biparti ? Justifiez. Rappel : $G = (V, E)$ est biparti s'il existe une partition V_1, V_2 de V t.q. chaque arête de G a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2.
3. Quelle est la longueur du plus long chemin (élémentaire) de $KC(p)$ pour $p \geq 4$? Exprimez sa longueur en fonction de p. Dessinez ce chemin dans le cas particulier de $KC(4)$. On ne demande pas de justification ici.
4. Pour quelles valeurs de $p \geq 4$ le graphe $KC(p)$ contient-il un parcours cyclique Eulérien ? Justifiez.
5. On veut colorier chaque sommet de $KC(p)$ avec $p \geq 4$ de telle manière que chaque sommet ait une couleur différente de celles de ses voisins. Quel est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier ainsi $KC(p)$? Justifiez.
6. Quelle est la taille d'un couplage de taille maximum de $KC(p)$ pour tout $p \geq 4$? Exprimez cette taille en fonction de p et justifiez votre réponse.
7. Faisons un DFS (parcours en profondeur) à partir d'un sommet r quelconque de $KC(p)$. Combien r aura t'il de fils dans l'arbre construit par le DFS ?
8. Un sommet u est un *point d'articulation* de G si en supprimant u de G le graphe obtenu n'est plus connexe. Combien $KC(p)$ (pour $p \geq 4$) contient il de points d'articulation ? Justifiez.
9. Est ce que $KC(p)$, pour tout $p \geq 4$, contient un cycle Hamiltonien ? Justifiez.

Exercice 2 – Une roue pondérée (3 points). Considérons le graphe à 9 sommets de la figure 2 où chaque arête du cycle a un poids de 1 et chaque arête incidente au sommet 1 central a un poids de 1,0001.

1. Construire un arbre couvrant de poids minimum dans ce graphe. Reproduisez le graphe de la figure 2 et soulignez dans une autre couleur les arêtes retenues dans l'arbre final. On ne demande pas les détails des calculs. Quel est son poids ?
2. Appliquez l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet 1 puis du sommet 5. Dans chaque cas, reproduisez le graphe de la figure 2 et soulignez dans une autre couleur les arêtes retenues dans l'arbre final construit par Dijkstra (on ne demande pas les étapes intermédiaires). Indiquez aussi dans chaque cas le poids total de l'arbre.

Exercice 3 – Coupe et flots (8 points). Nous considérons un ordinateur avec deux processeurs ; ils ne sont pas obligatoirement identiques. Nous voulons exécuter un programme très long sur cet ordinateur. Ce programme contient plusieurs modules qui communiquent entre eux durant l'exécution. Le coût d'exécution de chaque module sur les deux processeurs est connu, et peut varier d'un processeur à l'autre selon la mémoire et la vitesse de chaque processeur. Soient α_i et β_i les coûts d'exécution du module i sur les processeurs 1 et 2, respectivement. Si nous affectons des modules différents à des processeurs différents cela implique des

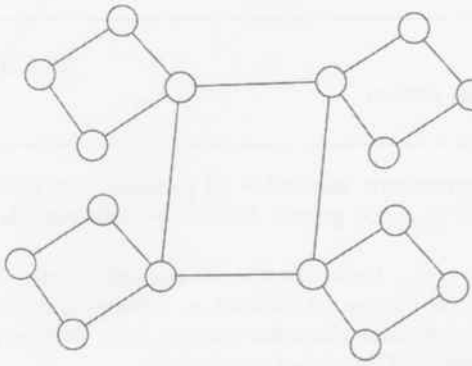

FIGURE 1 – Le graphe $KC(4)$

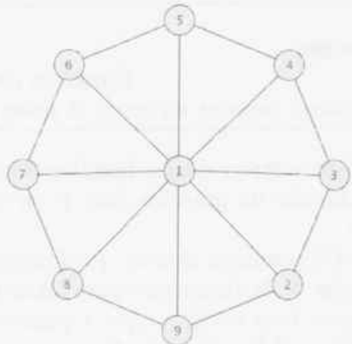

FIGURE 2 – Une roue

coûts assez importants dus à la communication entre les processeurs. Soit c_{ij} le coût de communication des deux processeurs si les modules i et j communiquent entre eux et ne sont pas affectés au même processeur. Nous voulons affecter les modules du programme aux deux processeurs tout en minimisant le coût total, exécution sur les processeurs+communication entre les processeurs.

Nous formulons ce problème comme un problème de coupe minimum dans un graphe orienté comme suit. Nous définissons un sommet source s représentant le processeur 1, un sommet puits représentant le processeur 2, et nous associons à chaque module du programme un sommet. Pour chaque sommet i, autre que la source et le puits, nous ajoutons un arc (s, i) de capacité β_i et un arc (i, t) de capacité α_i. Finalement, si le module i communique avec le module j durant l'exécution, alors nous ajoutons les arcs (i, j) et (j, i) et chacun avec une capacité c_{ij}.

1. Montrer qu'il existe une correspondance 1 à 1 entre les s-t-coupes dans le graphe ainsi défini et les affectations des modules aux deux processeurs.
2. Montrer que la capacité d'une coupe est égale au coût de l'affectation qui lui correspond.
3. Considérons l'application suivante avec un programme à 4 modules :

i	1	2	3	4
α_i	6	5	10	4
β_i	4	10	3	8

; $\{c_{ij}\}$ =

	1	2	3	4
1	0	5	0	0
2	5	0	6	2
3	0	6	0	1
4	0	2	1	0

3.1. Tracer le graphe associé à cette application.

3.2 Soient A_1 et A_2 les modules affectés aux processeurs 1 et 2, respectivement. Montrer en utilisant le théorème "flot-max coupe-min" que l'affectation $A_1 = \{4\}$ et $A_2 = \{1, 2, 3\}$ est optimale.