ISIMA 1ère année. 2014-2015

Examen de graphes 2ème session

Cet énoncé est à rendre à la fin de l'examen car vous devez écrire certaines de vos réponses directement dessus. Les autres réponses sont à écrire sur la copie blanche qui vous a été remise.

Ecrivez ici vos **Nom et prénom** :

Documents autorisés : support de cours et notes manuscrites.

Exercice 1 – Paramètres d'une famille de graphes et questions associées (9 points). On définie ici une nouvelle famille de graphes. Soit p un entier positif, $p \geq 3$. Le graphe $KE(p)$ est construit de la manière suivante.

Prendre $p+1$ graphes complets à p sommets chacun, notés : $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_p$. Notons $\{u_1, \ldots, u_p\}$ les p sommets de X_0. Chaque u_i de X_0 est connecté à un (seul) sommet quelconque de X_i (pour $i = 1, \ldots, p$).

1. Dessinez $KE(3)$.
2. Déterminez les paramètres de $KE(p)$ avec $p \geq 3$ quelconque : n : son nombre de sommets, m : son nombre d'arêtes, Δ : son degré maximum, δ : son degré minimum, D : son diamètre. Justifiez vos réponses.
3. Pour quelles valeurs de $p \geq 3$, $KE(p)$ est-il un graphe biparti ? Justifiez. Rappel : $G = (V, E)$ est biparti s'il existe une partition V_1, V_2 de V t.q. chaque arête de G a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2.
4. Quelle est la longueur du plus long chemin (élémentaire) de $KE(p)$ pour $p \geq 3$? Exprimez sa longueur en fonction de p. Dessinez ce chemin dans le cas particulier de $KE(3)$. On ne demande pas de justification ici.
5. Pour quelles valeurs de $p \geq 3$ le graphe $KE(p)$ contient-il un parcours cyclique Eulérien ? Justifiez.
6. On veut colorier chaque sommet de $KE(p)$ avec $p \geq 3$ de telle manière que chaque sommet ait une couleur différente de celles de ses voisins. Quel est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier ainsi $KE(p)$? Justifiez.
7. Deviens Quelle est la taille d'un couplage de taille maximum de $KE(p)$ pour tout $p \geq 4$? Exprimez cette taille en fonction de p et justifiez votre réponse.
8. Faisons un DFS (parcours en profondeur) à partir d'un sommet r quelconque de $KE(p)$. Combien r aura t'il de fils dans l'arbre construit par le DFS ?
9. Un sommet u est un *point d'articulation* de G si en supprimant u de G le graphe obtenu n'est plus connexe. Combien $KE(p)$ (pour $p \geq 3$) contient il de points d'articulation ? Justifiez.
10. Est ce que $KE(p)$, pour tout $p \geq 3$, contient un cycle Hamiltonien ? Justifiez.

Exercice 2 – (3 points).

1. Construisez un arbre couvrant de poids minimal du graphe pondéré de la figure 1. Dessinez sur votre copie l'arbre obtenu. Dites quel est son poids total. Quel algorithme avez-vous utilisé pour faire cette opération ?
2. Sur le graphe pondéré de la figure 1, appliquez l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet $r = 1$. Ecrivez sur la figure 1 du sujet à côté de chaque sommet la distance à r obtenue. Mettez aussi en couleur sur la figure 1 les arêtes de l'arbre obtenu.

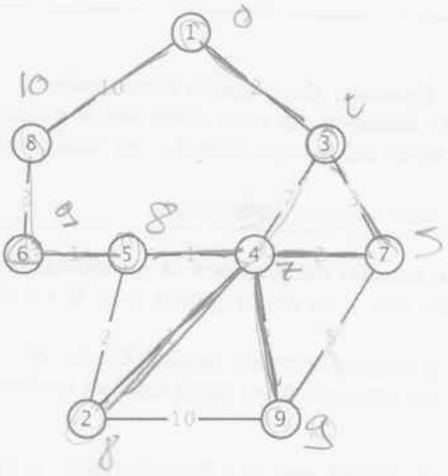

FIGURE 1 – Un graphe pondéré

L'exercice 3 est à rédiger sur une **copie séparée**.

Exercice 3 – (8 points). Soit le réseau G de la Figure 2.

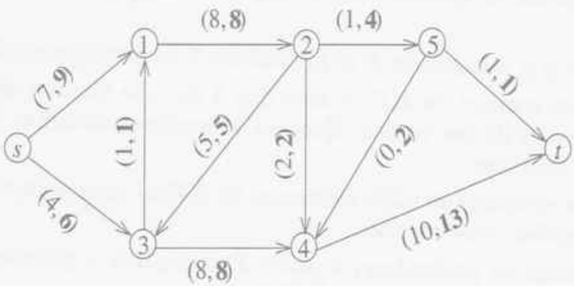

FIGURE 2 – La première composante de chaque couple, attachée à un arc dans la figure, représente la valeur d'un flot et la deuxième composante en gras désigne la capacité de l'arc.

Notons par x le flot sur les arcs du réseau G.

1. Est-que x est un flot réalisable de s à t ? Si oui donner sa valeur.
2. Est-ce que x est un flot maximum de s à t ? Si non, appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson vu en cours pour donner un flot maximum.
3. Justifier que le flot trouvé précédemment est maximum en donnant la coupe de capacité minimum séparant s et t. Expliquer comment la déduire de la dernière itération de l'algorithme de Ford- Fulkerson.
4. Maintenant supposons que le flot circulant sur l'arc (2,5) soit égale à au moins 2. Proposer une modification de l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum de s à t. Comment justifier que le flot est maximum dans ce cas ?

N.B. Pour illustrer l'algorithme de Ford-Fulkerson, il suffit de donner la chaîne améliorante de chaque itération, sa valeur (la valeur par laquelle le flot sera augmenté), et comment modifier le flot courant.