ISIMA 1ère année. 2011-2012

Examen de graphes

Document autorisé : support de cours et notes manuscrites.

Exercice 1 – Problème de flot. [8 points] Soit le réseau G de la Figure 1.

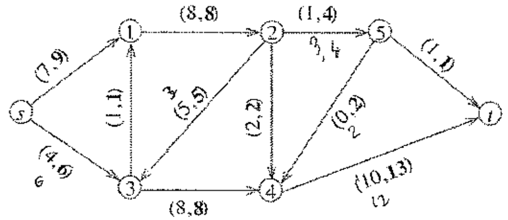

FIG. 1 – La première composante de chaque couple, attaché à un arc dans la figure, représente la valeur d'un flot et la deuxième composante en gras désigne la capacité de l'arc.

Appelons x le flot sur les arcs du réseau G de la figure 1.

1. Est-que x est un flot réalisable de s à t ? Si oui donner sa valeur.
2. Est-ce que x est un flot maximum de s à t ? Si oui montrez-le, si non, améliorez-le grâce à des chaînes améliorantes (décrivez précisément quelles chaînes vous utilisez et quelle est l'amélioration de chacune d'elle).
3. Justifier que le flot trouvé précédemment est maximum en donnant la coupe de capacité minimum séparant s et t. Expliquer comment déduire cette coupe de la dernière itération de l'algorithme de Ford-Fulkerson ou de l'algorithme d'étiquetage.
4. Supposons maintenant que l'arc $(2,3)$ soit spécial et que la quantité minimum de flot circulant sur cet arc soit d'au moins 4 (on ne doit donc pas avoir moins de 4 unités de flot circulant sur cet arc : par contre sa capacité maximum reste à 5). Proposer une modification de l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum de s à t avec cette nouvelle contrainte. Proposer un tel flot maximum et justifier qu'il est maximum.

Exercice 2 – Centre d'un graphe. [6 points]

Dans cet exercice nous supposons que les graphes sont non orientés, non pondérés et connexes. Soit $G = (V, E)$ un tel graphe. Rappel : $d(u, v)$ désigne la *distance* entre u et v dans G ; $ecc(u) = \max\{d(u, v) : v \in V\}$ est *l'eccentricité* de u dans G. Un sommet r est un *centre* de G si son eccentricité est minimum :

$$ecc(r) = \min\{ecc(u) : u \in V\}$$

Répondez aux questions suivantes, en justifiant vos réponses.

1. Est ce que dans tout graphe (non orienté, non pondéré et connexe) il existe un centre ?
2. Est-ce qu'un centre est toujours unique ? Justifiez.
3. Quel est le centre du graphe de la figure 2 ? Expliquez brièvement comment vous avez fait pour le trouver.
4. Proposez une méthode générale pour trouver le centre d'un graphe. On ne vous demande pas ici de décrire précisément en pseudo-code un algorithme mais de dire en quelques phrases claire et concises comment vous construiriez un algorithme pour faire cette tâche.

Exercice 3 – Paramètres d'une famille de graphes. [2 points] On définie ici une nouvelle famille de graphes. Soit p un entier positif, $p > 2$. Le graphe $CC(p)$ est construit de la manière suivante :

Prendre un cycle à $2p$ sommets (rappel : $V = \{0, \dots, 2p-1\}$ et $E = \{uv : u = v + 1 \mod 2p\}$) et ajouter à ce cycle une arête entre les sommets 0 et p.

1. Dessinez $CC(3), CC(4), CC(5)$.
2. Déterminez les paramètres de $CC(p)$ avec $p > 2$ quelconque (justifiez vos réponses) : n : son nombre de sommets, m : son nombre d'arêtes, Δ son degré maximum, δ : son degré minimum, D : son diamètre.

Exercice 4 – Arbres DFS. [4 points] Dans cet exercice, les graphes sont non orientés, non pondérés et connexes. Soit $G = (V, E)$ un tel graphe. Soit $r \in V$ et $T = (V, E_T)$ un arbre de racine r construit grâce au parcours en profondeur (DFS) à partir de r dans G. On note F_T l'ensemble des sommets de T qui n'ont pas de fils dans T.

1. Re-dessinez le graphe de la figure 2 sur votre copie et coloriez les arêtes d'un arbre T (résultat du DFS) enraciné en $r = 5$ (on ne vous demande pas de donner le déroulement de l'algorithme, juste de donner le résultat). Quel est l'ensemble F_T dans cet arbre ?
2. Dites si la phrase suivante est vraie ou pas pour tout graphe G (non orienté, non pondéré et connexe) et tout arbre T DFS dans lequel F_T contient au moins deux sommets (justifiez votre réponse) : "$\forall u \in F_T, \forall v \in F_T, u \neq v$, u et v ne sont pas voisins dans G"

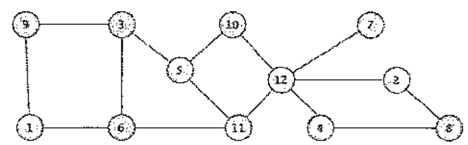

FIG. 2 – Un graphe