

ISIMA 1,  
**Examen de théorie des graphes**  
 2 février 2005

Documents de cours autorisés. Les exercices sont indépendants.

**I/ Exercice sur l'ordonnancement de projet.**

On considère un projet constitué de 7 tâches distinctes. Ces tâches sont de durées fixées. Elles sont liées par des contraintes de précédence, voir le tableau ci dessous.

Tâches	1	2	3	4	5	6	7
Durées (en jours)	3	5	3	2	5	5	2
successeurs	3	3	6,7	5	7	-	-

De plus, la tâche 4 ne peut commencer que 4 jours **après** le début du projet. Enfin la tâche 5 ne peut commencer plus d'une semaine **avant** le début de la tâche 3.

- 1) Tracez le graphe PERT
- 2) Calculer les ordonnancements au plus tôt et au plus tard. Quelles sont les tâches critiques?

**II/ Exercice sur les flots.**

On considère un réseau constitué de 6 sommets. Les arcs ont des capacités supérieures uniquement. Il s'agit de calculer un flot maximum entre les sommets source (noté s) et puits (noté p). le tableau ci dessous donne les arcs du réseau, leurs capacités, et un flot **f**.

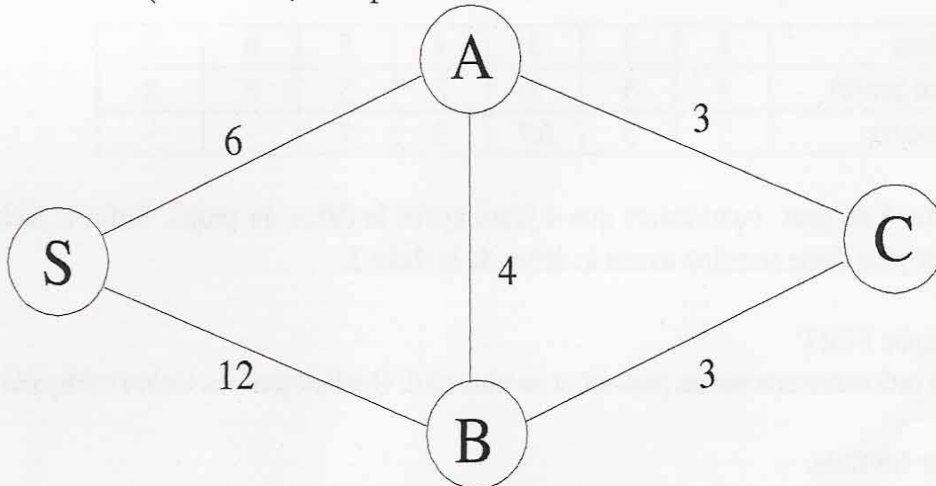
Arcs	s,1	s,3	1,2	1,3	1,4	2,4	2,p	3,4	4,p
capacités	5	5	2	2	4	2	3	5	7
Flot	5	3	1	2	2	0	1	5	7

- 1) Le flot proposé est-il réalisable?
- 2) A partir de **f**, utilisez l'algorithme de Ford et Fulkerson pour calculer un flot maximum et une coupe minimum. Vous détaillerez sur des graphes les étapes successives.

### III/

On considère une centrale électrique S qui dessert un certain nombre de sites (lotissements, quartiers, usines...) via des câbles à hautes tensions. Ces câbles constituent un réseau, et peuvent supporter de l'électricité circulant dans les deux sens. Chaque câble a une capacité qui s'exprime en énergie transportée par unité de temps (puissance), et les noeuds de commutation peuvent être programmés de façon à contrôler la répartition des flux entrant sur le noeud en termes de flux sortant.

Exemple de réseau (non orienté, les capacités sont sur les arêtes) :



Pour une période donnée, on connaît la demande de puissance émanant de chaque noeud :

Nœud/Site	A	B	C
Demande	5	7	3

1. On souhaite contrôler la circulation des flux électriques de façon à satisfaire ces demandes.

Expliquer comment on peut calculer une répartition de ces flux sur chaque câble, en résolvant un problème de flot adéquat. Bien expliquer la construction du réseau et la nature du problème à résoudre (on ne cherchera pas à appliquer d'algorithme).

2. Sur chaque câble, on a des pertes de puissance qui sont proportionnelles à la longueur des câbles et au flux qui y passe. Comment doit-on reformuler le problème précédent afin de minimiser ces pertes?

câble	[S,A]	[S,B]	[A,B]	[A,C]	[B,C]
longueur	3	8	2	5	2

3. Un flot  $f$  étant donné qui répond à la question 2, quel problème de chemin simple devra-t-on résoudre pour augmenter  $f$  afin de router une petite demande additionnelle  $d$  émanant d'un site  $x$ ? Comment faudrait-il renforcer le réseau pour améliorer son rendement, compte tenu de cette demande? Expliquer en utilisant l'exemple et en supposant  $x = C$ .

câble	[S,A]	[S,B]	[A,B]	[B,C]
flot	6 de S vers A	9 de S vers B	1 de A vers B	3 de B vers C