ISIMA 1ère année. 2010-2011

Examen de première session

Théorie des graphes

Exercice 1 – Arbre recouvrant de poids minimal dans un graphe.

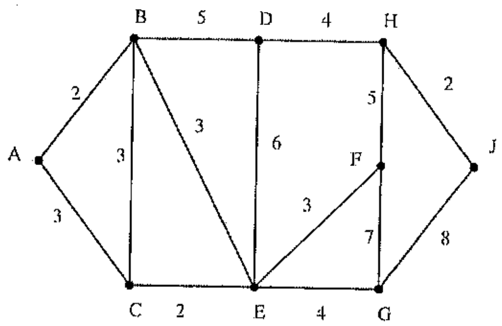

FIG. 1 – Un graphe pondéré

1. Utiliser l'algorithme de Kruskal pour calculer un arbre recouvrant de poids minimal dans le graphe de la figure 1. Donner toutes les étapes de l'algorithme ainsi que les principaux objets (variables) qui évoluent durant l'exécution de cet algorithme.
2. Proposer une méthode (dans le cas général) qui permet de mettre à jour un arbre recouvrant minimal si un nouveau sommet et ses arêtes incidentes pondérées sont ajoutées à G.

Exercice 2 – Rappels : le *degré* $d(u)$ du sommet u dans un graphe G est son nombre de voisins dans G. Le diamètre de G, $D(G)$ est le maximum des distances dans G.

1. Est-ce qu'il existe un graphe $G = (V, E)$ connexe à $n = 7$ sommets, possédant (au moins) deux cycles et dans lequel le nombre d'arêtes est $m = 7$? Si oui dessinez un tel graphe (en montrant qu'il vérifie bien les contraintes) et sinon, montrez pourquoi.
2. Est-ce qu'il existe un graphe à $n = 12$ sommets ayant deux sommets de degré 10 et dix sommets de degré 11 ? Si oui décrivez un tel graphe (en montrant qu'il vérifie bien les contraintes) et si non, montrez pourquoi.
3. Soit $G = (V, E)$ le graphe suivant. G a $p + q$ sommets (p et q deux entiers, $p \geq q \geq 3$) répartis dans V_1 ($|V_1| = p$) et dans V_2 ($|V_2| = q$), avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Chaque sommet de V_1 est voisin de tous les autres sommets de V_1 ; Chaque sommet de V_2 est voisin de tous les autres sommets de V_2. Enfin, dans V_1 il existe un sommet a et dans V_2 un sommet b tels que a et b sont voisins. Répondez aux questions suivantes en justifiant vos réponses.
   (a) Dessinez un exemplaire d'un tel graphe (choisissez les valeurs pour p et q).
   (b) Combien G contient-il d'arêtes ? (réponse demandée en fonction de p et q).
   (c) Quel est le degré maximum et le degré minimum de G ?
   (d) Quel est le diamètre de G ?

(e) Est-ce que G est bipartis ? (c'est-à-dire, est-ce que l'on peut affecter aux sommets de G une couleur, soit Noir soit Blanc, de telle façon que pour toute arête uv de G, u et v n'aient pas la même couleur).

4. Combien d'arêtes au maximum peut contenir un graphe à $n \geq 3$ sommets, de diamètre 2 ? Dessinez un tel graphe avec $n = 5$ sommets.

Exercice 3 – Problème de flot.

Un réseau (de source s et de puits t) et un flot sont représentés sur la figure 2. L'étiquetage (x, y) d'un arc signifie qu'une quantité x de flot passe sur cet arc qui est de capacité maximale y.

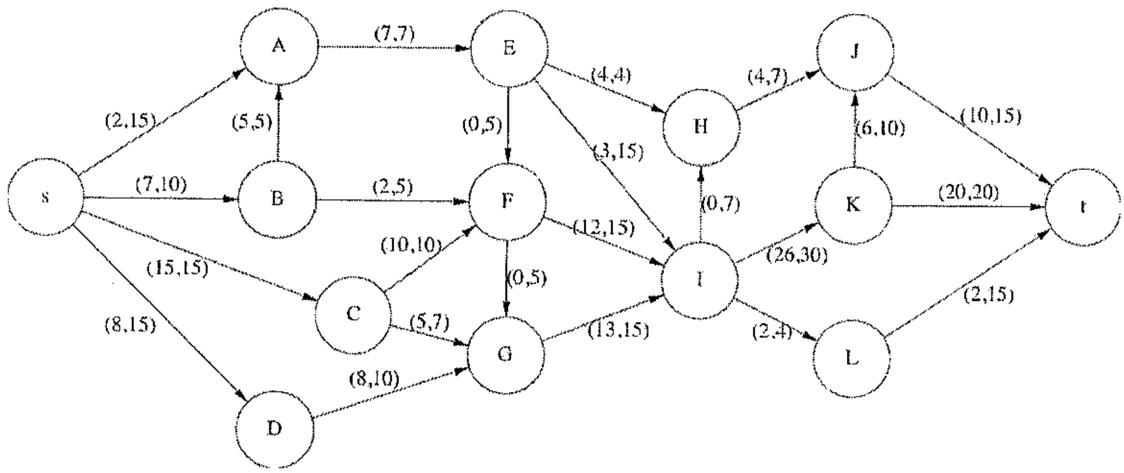

FIG. 2 – Le flot initial.

1. Le flot proposé sur la figure 2 est-il maximum ? (Justifiez votre réponse)
2. Si non, donnez un flot maximum pour ce réseau et exhibez une coupe permettant de prouver que ce flot est bien maximum.
3. En supposant que les deux arcs (A, E) et (I, L) sont tous les deux de capacité infinie, trouvez une coupe de capacité minimale dans ce réseau modifié. On notera ν la capacité de cette coupe.
   Déterminez maintenant les valeurs minimales des capacités que ces deux arcs ((A, E) et (I, L)) doivent avoir pour pouvoir obtenir un flot de valeur ν.
4. Supposons que l'on veuille changer les capacités de ces deux arcs ((A, E) et (I, L)) en deux étapes. Dans quel ordre doit-on changer ces capacités pour augmenter le plus possible la valeur du flot maximum après le premier changement ? Quels sont après chaque étape les valeurs des flots optimaux ?