Examen de Traitement du Signal - 3 Septembre 2013
1ère Année ISIMA

Durée : 2 heures. Le sujet comporte 2 pages.
1 page A4 recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrice autorisée.

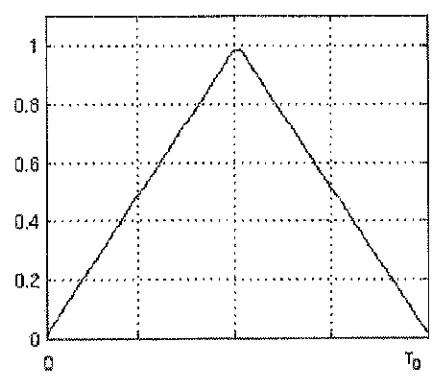
Exercice 1 *Fenêtre d'analyse en fréquence*
En pratique, un appareil ne peut pas analyser un signal de durée infinie. On doit donc couper un morceau de signal puis analyser ce morceau de signal en calculant sa transformée de Fourier. On utilise pour cela une fonction positive de durée finie T_o que l'on appelle la "fenêtre temporelle" $f_{T_o}(t)$. On pose $\nu_o = 1/T_o$. On obtient un morceau $y(t)$ de durée T_o du signal $x(t)$ en multipliant $x(t)$ par la fonction fenêtre :

$$y(t) = f_{T_o}(t) \cdot x(t). \tag{1}$$

1. Ecrire la transformée de Fourier de la relation (1) dans le cas général (on notera $F_{T_o}(\nu)$ la transformée de Fourier d'une fonction f_{T_o} quelconque).
2. La fenêtre la plus simple est la **fenêtre rectangulaire** $r_{T_o}(t) = \mathbb{1}_{[0,T_o]}(t)$.
   (a) Calculer la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire $r_{T_o}(t)$ que l'on note $R_{T_o}(\nu)$.
   (b) Calculer $|R_{T_o}(\nu)|$. Donner l'allure graphique de $|R_{T_o}(\nu)|$. *Attention aux valeurs absolues.*
   (c) Quelle est l'étendue en fréquence $\Delta\nu_r$ du lobe central (aussi appelé lobe principal) de $|R_{T_o}(\nu)|$? *Indication : on appelle lobe principal la partie du graphe comprise entre le premier zéro à gauche ($\nu < 0$) et le premier zéro à droite ($\nu > 0$).*
   (d) Calculer la hauteur du premier maximum secondaire de $|R_{T_o}(\nu)|$ (atteint pour $\nu = 1,43\nu_o$).
3. En pratique la fenêtre précédente présente certains "défauts" et on utilise souvent d'autres fenêtres. On s'intéresse maintenant à la **fenêtre dite triangulaire** décrite par :

$$v_{T_0}(t) = \begin{cases} \frac{2}{T_0}t & \text{si } 0 < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 2 - \frac{2}{T_0}t & \text{si } \frac{T_0}{2} < t < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

   Cette fonction est représentée ci-dessous :

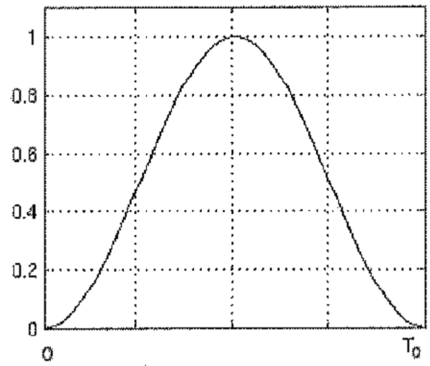


(a) Calculer la transformée de Fourier $V_{T_o}(\nu)$ de la fenêtre triangulaire $v_{T_o}(t)$. *Attention ce signal n'est pas centré en zéro !*
(b) Calculer $|V_{T_o}(\nu)|$. Donner l'allure graphique de la fonction $|V_{T_o}(\nu)|$.
(c) Quelle est l'étendue en fréquence $\Delta\nu_v$ du lobe central (ou lobe principal, centré en zéro) de $|V_{T_o}(\nu)|$?
(d) Calculer la hauteur du premier maximum secondaire de $|V_{T_o}(\nu)|$, atteint pour $\nu \simeq 2,86\nu_o$.

4. On s'intéresse maintenant à la fenêtre dite "**fenêtre de Hann**" décrite par :

$$h_{T_o}(t) = \mathbb{1}_{[0,T_o]}(t) \cdot [0.5 - 0.5\cos(2\pi\nu_o t)], \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Cette fonction est représentée ci-dessous :



(a) Déterminer la transformée de Fourier $H_{T_o}(\nu)$ de la fenêtre de Hann $h_{T_o}(t)$.
Indication : on pourra remarquer que $h_{T_o}(t)$ peut s'écrire sous la forme $h_{T_o}(t) = h(t - \frac{T_o}{2})$ *où* $h(t) = \mathbb{1}_{[-T_o/2,T_o/2]}(t) \cdot (0.5 + 0.5\cos(2\pi\nu_o t)), \quad t \in \mathbb{R}.$
(b) Donner l'allure graphique de la fonction $|H_{T_o}(\nu)|$.
(c) Quelle est l'étendue en fréquence $\Delta\nu_h$ du lobe central (ou lobe principal, centré en zéro) de $|H_{T_o}(\nu)|$?
(d) Calculer la hauteur du premier maximum secondaire de $|H_{T_o}(\nu)|$, atteint pour $\nu \simeq 2,36\nu_o$.

5. Comparer les largeurs des lobes principaux et la hauteur du premier maximum secondaire des 3 fenêtres étudiées.
6. On s'intéresse au signal $x(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) + 0,1\cos(2\pi(\nu_1 + 3,5\nu_o)t)$ avec $\nu_1 \gg \nu_o$.
(a) Déterminer la transformée de Fourier $X(\nu)$ de $x(t)$.
(b) Donner l'allure graphique de $|X(\nu)|$.
(c) Déterminer $Y_r(\nu)$ associé à $y_r(t)$ obtenu après fenêtrage de $x(t)$ par la fonction $r_{T_o}(t)$. Donner l'allure graphique de $|Y_r(\nu)|$.
(d) Déterminer $Y_h(\nu)$ associé à $y_h(t)$ obtenu après fenêtrage de $x(t)$ par la fonction $h_{T_o}(t)$. Donner l'allure graphique de $|Y_h(\nu)|$.
(e) Quelle fenêtre permet le mieux de bien voir que le signal $x(t)$ contient les deux fréquences ν_1 et $\nu_1 + 3,5\nu_o$? Justifier.
Indication : on pourra observer que l'utilisation d'une fenêtre rectangulaire laisse croire que des sinusoides sont présentes à des fréquences autres que ν_1 et $\nu_1 + 3,5\nu_o$ que l'on déterminera.