Examen de Traitement du Signal - 25 Août 2015

1ère Année ISIMA - Session de septembre

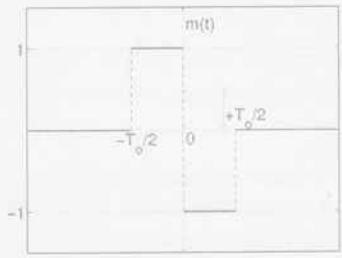
Durée : 2 heures. Le sujet comporte 4 pages.
1 page A4 recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrice non autorisée.

Exercice 1 Échantillonnage d'un signal périodique

Le but de cet exercice est de comprendre sur un exemple simple les conséquences de l'opération d'échantillonnage sur un signal périodique (pouvant par exemple représenter une note jouée en continu par un instrument de musique). Au lieu de travailler avec des décompositions en série de Fourier, nous allons travailler directement à l'aide de la transformée de Fourier. Dans cet esprit, nous allons décrire un signal périodique comme la répétition périodique d'un motif de base. Ensuite, il s'agira d'abord de comprendre les conséquences d'un filtrage passe-bas sur ce type de signaux, puis d'étudier l'effet d'un éventuel sous-échantillonnage lors d'une conversion analogique-numérique.

1. Transformée de Fourier d'un signal périodique de période $T_0 = 1/\nu_0$ à temps continu.

   On s'intéresse au signal $x(t)$ périodique de période T_0, et construit à partir du motif $m(t)$ décrit par le graphe ci-dessous :



   On définit alors $x(t)$ comme :

$$x(t) = m * \text{III}_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m * \delta_{nT_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m * \delta(t - nT_0)$$

   où III_{T_0} est le peigne de Dirac de période T_0.

   a) Tracer de façon rigoureuse l'allure graphique de $x(t)$.

   b) Proposer une expression mathématique pour décrire le signal $m(t)$.

   c) Calculer maintenant la transformée de Fourier du signal $m(t)$, notée $M(\nu)$.

   d) Rappeler (c'est-à-dire sans calculs) la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac.

   e) Déterminer la relation entre la transformée de Fourier de $x(t)$, notée $X(\nu)$, et $M(\nu)$.

   f) Montrer que $X(\nu) = \frac{2j}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1-(-1)^m}{2m} \delta_{m\nu_0}(\nu)$, où $\nu_0 = 1/T_0$.

   g) Tracer rigoureusement l'allure graphique de $|X(\nu)|$.

Dans le reste de cet exercice, nous nous intéressons au résultat d'une succession de traitements appliquée au signal $x(t)$ et décrite par la figure 1. Nous nous intéressons à deux cas. Le signal est d'abord filtré par un filtre passe-bas à la fréquence de coupure ν_y (respectivement ν_z) pour obtenir $y(t)$ (respectivement $z(t)$). Le signal $y(t)$ (respectivement $z(t)$) est ensuite échantillonné à la fréquence Fe. Enfin, il s'agit de reconstruire le signal en sortie grâce à un filtrage passe-bas à la fréquence $Fe/2$ qui produit $y_s(t)$ (respectivement $z_s(t)$).

FIGURE 1 – Chaîne de traitement : $x(t)$ est d'abord filtré par un filtre passe-bas à la fréquence de coupure ν_y ou ν_z, puis échantillonné à la fréquence Fe. La reconstruction consiste en un filtrage passe-bas à la fréquence $Fe/2$.

2. Filtrage passe-bas d'un signal périodique.
   Nous supposons maintenant la fréquence fondamentale ν_0 fixée égale à 440 Hz.
   Soit $y(t)$ le signal obtenu à partir de $x(t)$ après un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_y = 3,5$ kHz.
   Soit $z(t)$ le signal obtenu à partir de $x(t)$ après un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_z = 2,5$ kHz.
   a) Donner donc les expressions de $Y(\nu)$ et $Z(\nu)$.
   b) Tracer l'allure graphique de $Y(\nu)$ et $Z(\nu)$ pour $\nu \in [-5\ kHz, 5\ kHz]$.
   c) À l'écoute des signaux analogiques $x(t)$, $y(t)$, et $z(t)$ (en supposant la chaîne HiFi parfaite), quelles différences qualitatives perçoit-on entre les 3 signaux ? Justifier.

3. Échantillonnage et reconstruction.
   On s'intéresse maintenant aux versions échantillonnées $y_{ech}(t)$ (respectivement $z_{ech}(t)$) obtenues par échantillonnage idéal de $y(t)$ (respectivement $z(t)$) pour différentes valeurs de la fréquence d'échantillonnage F_e. Soient $y_s(t)$ (respectivement $z_s(t)$) les signaux de sortie reconstruits à partir de $y_{ech}(t)$ (respectivement $z_{ech}(t)$) par filtrage passe-bas à la fréquence $F_e/2$.
   a) Rappeler la relation entre $y_{ech}(t)$ (respectivement $z_{ech}(t)$) et $y(t)$ (respectivement $z(t)$).
   b) Donner l'expression de la transformée de Fourier $Y_{ech}(\nu)$ de $y_{ech}(t)$ en fonction de $Y(\nu)$ (respectivement $Z_{ech}(\nu)$ en fonction de $Z(\nu)$).
   c) Rappeler quelle propriété caractérise $Y_{ech}(\nu)$ et $Z_{ech}(\nu)$.
   d) Décrire et commenter l'origine des différences éventuelles entre $y_s(t)$ et $y(t)$ (respectivement entre $z_s(t)$ et $z(t)$) lorsque :
      · $F_e = 7$ kHz,
      · $F_e = 5$ kHz,
      · $F_e = 3$ kHz.
      On raisonnera dans le domaine fréquentiel en s'appuyant sur des graphiques bien choisis et proprement présentés pour illustrer et expliquer les 3 cas.

4. Principe de précaution.
   Quelle opération doit-on effectuer avant l'échantillonnage d'un signal $x(t)$ à une fréquence F_e pour éviter l'apparition de termes parasites dans le signal $x_s(t)$ (défini de manière analogue à y_s et z_s), quelle que soit la fréquence d'échantillonnage F_e ?
   Remarque : par "termes parasites" on entend composantes du signal qui ne sont pas présentes dans $x(t)$ mais qui pourraient apparaître dans $x_s(t)$.