Examen de Traitement du Signal - Lundi 26 janvier 2015

1re Année ISIMA

Durée : 2 heures. Le sujet comporte 3 pages.
1 page A4 recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrice non autorisée.

Problème : Restauration d'une image tramée par filtrage

Introduction Nous nous intéressons dans ce sujet à la restauration d'une image tramée (figure 1). Pour résoudre ce problème, nous allons tout d'abord étudier une modélisation d'un signal tramé, avant de proposer une méthode de restauration utilisant du filtrage. Dans un second temps, nous allons traiter les cas où l'on utilise des signaux numériques et aléatoires.

FIGURE 1 – Exemple d'une image tramée

Modélisation Pour simplifier ce problème, nous allons utiliser un signal, dit tramé, à une dimension, noté $x_e(t)$. On modélise ce signal comme le produit entre le signal à restaurer, noté $x(t)$, par une trame, notée $e_T(t)$. Nous détaillerons plus tard l'expression de ce signal. Voici donc le modèle utilisé :

$$x_e(t) = x(t) \times e_T(t).$$

Les quatre parties peuvent être traitées de façon totalement indépendantes.
Le barème est donné à titre indicatif. Il est supérieur à 20 points (longueur du sujet).

Partie I — Transformée de Fourier du signal tramé $x_e(t)$ ***(10 pts)***

Dans un premier temps nous allons étudier la trame $e_T(t)$ et calculez sa transformée de Fourier.

1. Considérons tout d'abord le signal porte, $p(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{T}{4},\frac{T}{4}]}(t)$.

   a) Tracez $p(t)$. **(0.5 pt)**

   b) Donnez la transformée de Fourier de $p(t)$, notée $P(\nu)$. **(0.5 pt)**

   ⚠ *Ici la porte possède une largeur de $\frac{T}{2}$.*

   c) Tracez $P(\nu)$ pour $\nu \in [-\frac{8}{T}, \frac{8}{T}]$. Notez les valeurs où la courbe passe par zéro. **(0.5 pt)**

2. Nous allons calculer la transformée de Fourier de la trame. Pour modéliser cette trame, notée $e_T(t)$, nous utilisons un signal périodique de période T qui est défini par les expressions suivantes :

$$e_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - kT) \tag{1}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{kT} * p(t) = \text{Ш}_T * p(t) \tag{2}$$

   a) Tracez $e_T(t)$ pour $t \in [-3T, 3T]$. **(1 pt)**
   Indication : vous pouvez utiliser l'expression (1) de $e_T(t)$.

   b) Comment s'appelle l'opérateur $\text{Ш}_T(t)$. **(0.5 pt)**

   c) Rappelez la transformée de Fourier de $\text{Ш}_T(t)$. **(0.5 pt)**

   d) Calculez la transformée de Fourier de $e_T(t)$, notée $E_T(\nu)$. **(1 pt)**
   Indication : vous pouvez utiliser l'expression (2) de $e_T(t)$.

   e) Tracez $E_T(\nu)$ pour $\nu \in [-\frac{8}{T}, \frac{8}{T}]$ avec le plus de précision possible. **(1.5 pts)**

Pour finir, nous allons calculer la transformée de Fourier du signal tramé $x_e(t)$. On va considérer que le signal à restaurer $x(t)$ est un signal à bande limitée dans $[-\nu_M, \nu_M]$ avec $\nu_M < \frac{1}{2T}$.

3. Montrez que la transformée de Fourier du signal tramé, notée $X_e(\nu)$ peut s'écrire sous la forme :

$$X_e(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(k\frac{\pi}{2}\right) X\left(\nu - \frac{k}{T}\right) \tag{3}$$

où, $X(\nu)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$. **(1.5 pts)**

4. Tracez $X_e(\nu)$ pour $\nu \in [-\frac{8}{T}, \frac{8}{T}]$. On utilisera une allure arbitraire pour $X(\nu)$. **(1.5 pts)**
   ⚠ *On respectera scrupuleusement la condition $\nu_M < \frac{1}{2T}$ pour le tracé.*

5. A l'aide du graphique, proposez une solution en l'expliquant afin de restaurer le signal tramé en utilisant du filtrage. **(1 pt)**

Partie II — Restauration du signal par filtrage (4 ***pts****)*

On vient donc de voir qu'il est possible de restaurer le signal par l'utilisation d'un filtre linéaire. On note par la suite $h(t)$ la réponse impulsionnelle et $H(\nu)$ la réponse en fréquence de ce filtre. Le signal d'entrée du filtre est $x_e(t)$ où $x_e(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} X_e(\nu)$ et le signal de sortie (c'est-à-dire la restauration) est $x_r(t)$ où $x_r(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} X_r(\nu)$.

1. Rappelez les relations entre $x_r(t)$, $h(t)$ et $x_e(t)$ ainsi qu'entre $X_r(\nu)$, $H(\nu)$ et $X_e(\nu)$. **(0.5 pt)**

2. On considère le filtre avec $h(t) = \frac{1}{2}e^{-a|t|}$ avec $a > 0$.
   a) Tracez $h(t)$. **(0.5 pt)**
   b) Calculez la réponse en fréquence $H(\nu)$. **(1 pt)**
   Indication : On rappelle que $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)e^{-at} \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{1+j2\pi\nu}$
   c) Tracez $H(\nu)$. **(0.5 pt)**
   d) Quelles sont les propriétés du filtre (nature, stabilité, causalité, ...) ? **(1.5 pts)**

Partie III — Restauration dans le cas d'une image numérique (3 pts)

Bien entendu cette restauration se réalise à l'aide d'images numériques. Nous allons étudier le cas où le signal $x_e(t)$ est échantillonné.

1. Rappelez le théorème de Shannon. **(0.5 pt)**

2. Est-ce que le signal $x_e(t)$ est à bande limitée ? Vous expliquerez votre réponse. **(0.5 pt)**
   Indication : vous pouvez exploiter l'expression (3) de $X_e(\nu)$

De ce fait, si l'on échantillonne le signal $x_e(t)$ il y aura repliement spectral, il sera donc impossible de le reconstruire. Cependant, le signal qui nous intéresse est $x(t)$, il y a des cas particuliers dans le choix de la fréquence d'échantillonnage, notée F_e, qui permettrait de restaurer le signal $x(t)$.

3. Donnez le lien entre F_e et T de tel façon que nous serions capable de restaurer le signal $x(t)$ à partir des échantillons de $x_e(t)$. **(2 pts)**
   Indication : Tout le raisonnement peut se faire graphiquement à l'aide de l'expression (3) de $X_e(\nu)$ et en tenant compte que $x(t)$ est un signal à bande limitée dans $[-\nu_M, \nu_M]$ avec $\nu_M < \frac{1}{2T}$.

*Partie IV — Étude du problème par l'utilisation des signaux aléatoires (**7 pts**)*

Nous considérons que le signal à restaurer $x(t,\omega)$ est un signal aléatoire **stationnaire** où $\mathbb{E}\left[x(t,\omega)\right] = m_x$ et $\mathbb{E}\left[x(t,\omega)\overline{x(t-\tau,\omega)}\right] = R_x(\tau)$. Nous allons calculer la moyenne statistique et l'autocorrélation statistique du signal aléatoire $x_e(t,\omega) = x(t,\omega) \times e_T(t,\omega)$.
Afin de rendre $e_T(t,\omega)$ (signal aléatoire trame) stationnaire, nous allons rendre aléatoire l'origine des temps :

$$e_T(t,\omega) = e_T(t+\phi(\omega))$$

où $\phi(\omega)$ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,T]$.

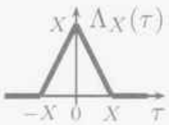
1. Tracer une représentation graphique de plusieurs réalisations de ce processus. (**0.5 pt**)

2. Représenter graphiquement la densité de probabilité de la variable aléatoire $\phi(\omega)$. (**0.5 pt**)

3. Le signal aléatoire $e_T(t,\omega)$ est stationnaire. Montrez que la moyenne statistique et l'autocorrélation statistique de ce processus peuvent s'écrire sous la forme suivante (**3 pts**) :

$$m_{e_T} = \mathbb{E}\left[e_T(t,\omega)\right] = \frac{1}{2} \tag{4}$$

$$R_{e_T}(\tau) = \mathbb{E}\left[e_T(t,\omega)\overline{e_T(t-\tau,\omega)}\right] = \frac{1}{T}\text{Ш}_T * \Lambda_{\frac{T}{2}}(\tau) \tag{5}$$

où $\Lambda_X(\tau)$ est la fonction triangle telle que : 

<u>Indications</u> : On se rendra compte que $e_T(t,\omega)$ est une fonction scalaire d'une variable aléatoire continue : cela permet d'utiliser la bonne expression pour l'espérance mathématique. De plus, $e_T(t,\omega)$ est périodique de période T. Finalement, les calculs intégrales sous-jacents peuvent être résolus facilement graphiquement.

Nous allons maintenant rechercher les caractéristiques statistiques de $x_e(t,\omega)$.

4. A l'aide des équations (4) et (5), calculez les expressions de la moyenne statistique et de l'autocorrélation statistique de $x_e(t,\omega)$, notées m_{x_e} et $R_{x_e}(\tau)$. (**1 pt**)

5. Calculez la densité spectrale de puissance du signal aléatoire $x_e(t,\omega)$, notée $S_{x_e}(\nu)$. On posera $S_x(\nu)$ la densité spectrale de puissance du signal aléatoire $x(t,\omega)$. (**2 pts**)
   <u>Rappel</u> : $\Lambda_X(\tau) \overset{TF}{\leftrightarrow} X^2\text{sinc}^2(\pi X\nu)$.