

Examen de Traitement du Signal - Lundi 25 janvier 2016

1^{re} Année ISIMA

Durée : 2 heures. Le sujet comporte 3 pages.

1 page A4 recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrice non autorisée.

Exercice Modélisation d'un système optique avec une acquisition numérique

Introduction Nous nous intéressons à l'étude d'un système optique simple avec une acquisition numérique de l'image. De part la nature ondulatoire de la lumière, des phénomènes de diffraction apparaissent. Il est fondamental de bien les comprendre pour appréhender certains paramètres comme la résolution spatiale. De plus, pour acquérir l'image en sortie une matrice de capteurs va mesurer l'intensité lumineuse sur des zones photosensibles. Finalement, ce système sera également le siège de bruit qui viendra perturber le signal.

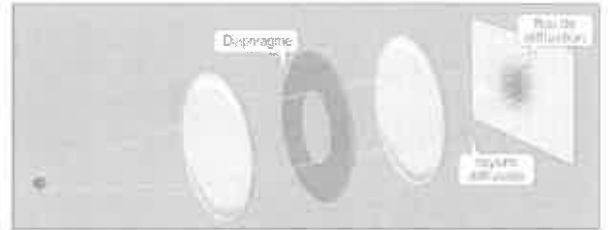


FIGURE 1 – Modélisation du système optique

Objectifs Dans ce sujet, nous allons étudier dans la partie I les phénomènes de diffraction dus à l'optique du système, dans la partie II la modélisation de l'échantillonnage qui utilise des capteurs photosensibles et finalement dans la partie III l'influence du bruit dans l'image.

Les 3 parties peuvent être traitées de façon indépendantes. Le barème est donné à titre indicatif. La compréhension du contexte de l'exercice n'est pas nécessaire pour répondre aux questions.

Partie I — Système Optique : Diffraction et transformée de Fourier (≈ 9 points)

Le phénomène de diffraction dans un système optique peut se calculer sous certaines conditions¹ à l'aide de la transformée de Fourier. En effet, l'intensité lumineuse du motif de diffraction au niveau du plan capteur est proportionnelle au carré du module de la transformée de Fourier de l'ouverture diffractante. Pour simplifier le problème, nous allons travailler en une dimension et l'on note $d(t)$ l'ouverture diffractante (\leftrightarrow diagramme) et l'on note $I(\nu)$ le motif de diffraction défini par :

$$I(\nu) = \alpha |D(\nu)|^2 \text{ où } d(t) \xleftrightarrow{TF} D(\nu) \quad (1)$$

où α est un coefficient de proportionnalité. Nous allons étudier différentes ouvertures diffractantes.

1. *Ouverture carré* : On considère une ouverture carré de largeur a , notée $d_1(t)$, telle que :

$$d_1(t) = \mathbb{I}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(t)$$

- a) Tracer le signal $d_1(t)$.
 - b) Rappeler la transformée de Fourier de $d_1(t)$, noté $D_1(\nu)$.
 - c) Calculer le motif de diffraction $I_1(\nu)$ (cf équation 1).
 - d) Tracer une représentation graphique de $I_1(\nu)$ pour $\nu \in [-\frac{4}{a}, \frac{4}{a}]$.
2. *Diffraction fente double* (Fentes d'Young) : On considère deux ouvertures de taille a écartées d'une distance b , notées $d_2(t)$, telles que :

$$d_2(t) = \mathbb{I}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]} \left(t - \frac{b}{2} \right) + \mathbb{I}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]} \left(t + \frac{b}{2} \right)$$

Pour les représentations graphiques on considère que $b = 2a$.

1. Dans le cas de l'approximation de Fraunhofer qui est l'observation en champ lointain de la figure de diffraction.

- a) Tracer le signal $d_2(t)$.
 - b) Rappeler la propriété du retard de la transformée de Fourier, c'est-à-dire $x(t - \tau) \xleftrightarrow{TF} \dots$
 - c) Calculer le motif de diffraction $I_2(\nu)$ (cf équation 1).
 - d) Tracer une représentation graphique de $I_2(\nu)$ pour $\nu \in [-\frac{3}{a}, \frac{3}{a}]$.
3. *Diffraction à N fentes identiques* : On considère une ouverture constituée de N ouvertures de taille a écartés d'une distance b , notée $d_3(t)$, telle que :

$$d_3(t) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \mathbb{I}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(t - nb) \text{ où } N \text{ est impair}$$

Pour les représentations graphiques on considère que $b = 2a$ et $N = 5$.

- a) Tracer le signal $d_3(t)$.
- b) Montrer que le motif de diffraction $I_3(\nu)$ (cf équation 1) peut s'écrire :

$$I_3(\nu) = \alpha a^2 \text{sinc}^2(\pi \nu a) \frac{\sin^2(\pi \nu b N)}{\sin^2(\pi \nu b)}$$

Indication : La suite géométrique de raison q vaut : $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$

- c) Tracer une représentation graphique de $I_3(\nu)$ pour $\nu \in [-\frac{2}{a}, \frac{2}{a}]$.

Partie II — Acquisition numérique de l'image (≈ 6 points)

Après le système optique, un ensemble de capteurs photosensibles sont présents pour acquérir l'image.

1. Rappeler le théorème de Shannon.
2. Dans le cas de l'échantillonnage idéal, rappeler la relation dans le domaine fréquentiel entre la transformée de Fourier d'un signal et la transformée de Fourier de sa version échantillonnée ?

On note l'image à acquérir $x(t)$ (réduite ici à une dimension) à bande limitée dans $[-\nu_0, \nu_0]$. On note $x_e(t)$ la version échantillonnée de $x(t)$. L'échantillonnage réalisé ici n'est pas idéal. Le signal est échantillonné à une période T (où $\frac{1}{T} \geq 2\nu_0$) tout en moyennant l'information sur une zone photosensible de largeur $\tau < T$. On peut modéliser cette opération par l'utilisation d'un filtre moyennneur de réponse impulsionnelle $h_c(t)$ couplé à un échantillonneur. On peut écrire le signal échantillonné $x_e(t)$ par l'expression suivante :

$$x_e(t) = (x * h_c(t)) \times \text{III}_T(t) \text{ où } h_c(t) = \mathbb{I}_{[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]}(t)$$

3. Tracer l'allure du signal $x_e(t)$ à l'aide d'une allure arbitraire de $x(t)$ et en utilisant $\tau = \frac{T}{2}$. Vous mettez graphiquement en évidence l'influence de $h_c(t)$.
4. En notant $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(\nu)$, calculer la transformée de Fourier de $x_e(t)$, notée $X_e(\nu)$.
5. Tracer $X_e(\nu)$ en utilisant une allure arbitraire pour $X(\nu)$ avec $\tau = \frac{T}{2}$ et pour $\nu \in [-\frac{3}{T}, \frac{3}{T}]$.
6. A quelle(s) condition(s) peut-on reconstruire exactement le signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$?

Partie III — Influence du bruit lors de l'acquisition (≈ 5 points)

Les mesures sont perturbées par la présence d'un bruit.

- L'image en entrée du système, notée $x(t, \omega)$ (réduite ici à une dimension), est un signal stationnaire où l'on note m_x sa moyenne statistique et $R_x(\tau)$ son autocorrélation statistique;
- Cette image est tout d'abord filtrée par le système optique qui se modélise par sa réponse impulsionnelle notée $h_0(t) = a \operatorname{sinc}(\pi za)$;
- Ensuite un **bruit blanc**, noté $n(t, \omega)$, vient s'ajouter aux mesures. C'est un signal stationnaire, additif et centré ($\Leftrightarrow \mathbb{E}(n(t, \omega)) = 0$);
- Finalement, le capteur réalisant la mesure, moyenne l'information sur une zone. Cette étape se modélise par un filtrage avec une réponse impulsionnelle, notée $h_c(t) = \mathbb{I}_{[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]}(t)$.

En résumé, le signal de sortie qui est un signal stationnaire et noté $y(t, \omega)$, peut s'écrire :

$$y(t, \omega) = [x(t, \omega) * h_0(t) + n(t, \omega)] * h_c(t)$$

Dans le cas d'un filtre linéaire et pour des signaux stationnaires, rappeler la relation entre la moyenne statistique du signal de sortie et la moyenne statistique du signal d'entrée ?

2. Calculer la fonction d'espérance statistique de $y(t, \omega)$.
3. Dans le cas d'un filtre linéaire et pour des signaux stationnaires, rappeler la relation entre la densité spectrale de puissance du signal de sortie et la densité spectrale de puissance du signal d'entrée ?
DSP
4. En notant $S_x(\nu)$ la densité spectrale de puissance de $x(t, \omega)$, calculer la densité spectrale de puissance de $y(t, \omega)$, notée $S_y(\nu)$.
5. En utilisant une allure arbitraire de $S_x(\nu)$, tracer $S_y(\nu)$.