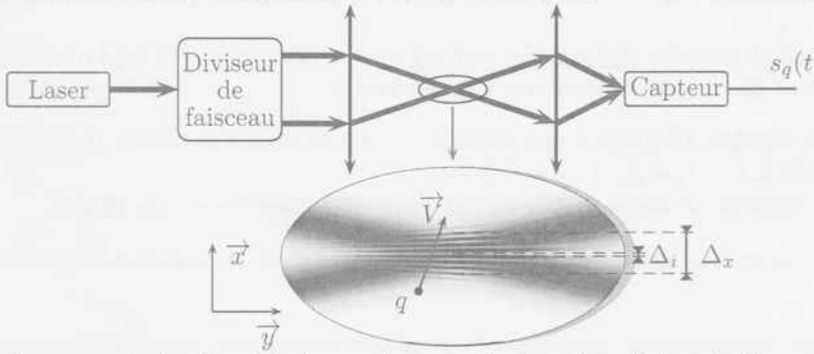
# Examen de Traitement du Signal - Mercredi 13 mars 2013

## 1re Année ISIMA

**Durée : 2 heures. Le sujet comporte 2 pages. Les deux exercices sont indépendants**
**1 page A4 recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrice non autorisée.**

## Exercice : 1 Vélocimétrie laser à franges

La Vélocimétrie Laser à effet Doppler (VLD) est une technique de mesure de la vitesse particulaire dans un fluide sans la moindre perturbation (mesure optique). Cette méthode est couramment utilisée en mécanique des fluides pour mesurer des vitesses dans des écoulements de natures très variées : laminaires, turbulents, sub ou hypersoniques, à hautes températures...
Cette technique est basée sur la mesure du décalage en fréquence entre la lumière émise par une source laser et celle diffusée par une particule d'ensemencement $q$ en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{V}$ dans un fluide. Deux faisceaux de lumière monochromatique cohérente, issus d'un même laser, et parcourant des chemins optiques de même longueur, sont focalisés et croisés en un point où se forme alors un réseau de franges d'interférence. Quand une particule traverse ces franges alternativement sombres et brillantes, elle diffuse un signal lumineux modulé en amplitude à une certaine fréquence. Cette fréquence issue de l'effet Doppler, notée $\nu_D$, est proportionnelle à la composante perpendiculaire au plan des franges de la vitesse de la particule. Finalement, la lentille de collimation focalise la lumière vers le capteur photosensible qui effectue la transduction de l'intensité lumineuse en signal électrique, noté $s_q(t)$. Le contenu fréquentiel de ce signal permet d'estimer la vitesse de la particule à l'intérieur du réseau de franges.




On va se placer dans un cas simple où il n'y a qu'une particule qui se déplace à vitesse constante le long de l'axe des $\overrightarrow{x}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{V} = V_x \overrightarrow{x}$. Dans ce cas le signal recueilli par le capteur vaut :

$$\boxed{s_q(t) = a_q(t)\left[M + \cos\left(2\pi\nu_D t\right)\right]} \text{ avec } a_q(t) = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma_x}\right)^2} \text{ et } M \geq 1, \text{ où } \sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Delta_x}{V_x} \text{ et } \nu_D = \frac{V_x}{\Delta_i}.$$

$A$ est une amplitude liée, entre autre, à la puissance du signal lumineux émis par le laser, $\Delta_x$ est la dimension des franges d'interférences dans la direction des $\overrightarrow{x}$, $\Delta_i$ est l'interfrange (distance entre deux franges sombres ou claires) et $M$ une composante continue (et constante) liée au contraste des franges, appelée *piédestal*. Ce signal est généralement nommé *bouffée Doppler*.

1. Tracer l'allure du signal $s_q(t)$ pour $M = 1$ et $M = 2$ (on considérera $\frac{1}{\nu_D} \ll \sigma_x$).

2. **Étude de l'enveloppe gaussienne** :
   On sait que $g(t) = e^{-\pi t^2} \overset{TF}{\leftrightarrow} G(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

   a) Rappeler la transformée de Fourier d'une dilatation/contraction $y(t) = x(at)$ où $a > 0$.

   b) Montrer que la transformée de Fourier de $a_q(t)$ peut s'écrire $a_q(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} A_q(\nu) = A\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\nu}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\sigma_\nu}\right)^2}$.
   Vous donnerez l'expression de $\sigma_\nu$ en fonction de $\sigma_x$

   c) Tracer graphiquement $A_q(\nu)$.

3. **Étude du signal de bouffée Doppler** :

   a) Calculer la transformée de Fourier de $s_q(t)$, notée $S_q(\nu)$. Tracer graphiquement $S_q(\nu)$.

   b) Proposer une méthode pour estimer la vitesse de la particule à l'aide de $S_q(\nu)$.

   c) Rappeler le théorème de Shannon.

   d) Peut-on échantillonner $s_q(t)$ en respectant le théorème de Shannon ? Si oui, quelle est la valeur de $F_e$, si non quelle opération doit-on effectuer pour échantillonner ce signal ?

4. **Filtrage et Échantillonnage du signal** :
   On filtre $s_q(t)$ par un filtrage passe-bande idéal ayant avec une fréquence centrale de $\nu_0 = \nu_D$ et une bande passante de $\Delta_\nu = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma_\nu$ (on note $H(\nu)$ la réponse en fréquence de ce filtre). Ce signal, noté $\tilde{s_q}(t)$, est ensuite échantillonné.

   a) Tracer $H(\nu)$.

   b) Calculer la transformée de Fourier inverse de $H(\nu)$, notée $h(t)$.
   <u>*Rappel*</u> : $F_0 \text{sinc}(\pi t F_0) \overset{TF}{\leftrightarrow} \mathbb{1}_{[-F_0/2;F_0/2]}(\nu)$

   c) Comment s'appelle $h(t)$ ? Quelle est la relation entre $s_q(t)$ et $\tilde{s}_q(t)$ ?

   d) Quelle fréquence d'échantillonnage $F_e$ doit-on choisir ?

   e) Tracer graphiquement la transformée de Fourier du signal échantillonné pour $\nu \in [-2F_e, 2F_e]$.

## Exercice : 2 Sinusoïde avec fréquence et phase aléatoires

Considérons le signal aléatoire <u>stationnaire</u> $x(t,\omega) = \alpha\cos(2\pi F(\omega)\, t + \Phi(\omega))$ où la fréquence $F(\omega)$ et la phase $\Phi(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

- $F(\omega)$ est une variable aléatoire uniformément distribuée dans l'intervalle $[f_1, f_2]$ (on posera quand cela est possible $\Delta f = f_2 - f_1$ et $f_0 = \frac{f_1+f_2}{2}$) ;
- $\Phi(\omega)$ est une variable aléatoire uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

On remarquera que $x(t,\omega)$ est une fonction scalaire d'un couple de variables aléatoires continues indépendantes.

1. Tracer une représentation graphique de plusieurs réalisations de ce processus (on fera attention à "jouer" avec tous les aléas).

2. Représenter graphiquement la densité de probabilité de la variable aléatoire $F(\omega)$ ainsi que la densité de probabilité de la variable aléatoire $\Phi(\omega)$.

3. Calculer la fonction d'espérance du signal aléatoire $x$, c'est-à-dire $m_x = \mathbb{E}[x(t,\omega)]$.

4. Montrer que l'autocorrélation statistique du signal aléatoire $x$ peut s'écrire sous la forme :

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t,\omega)\, x(t-\tau,\omega)] = \frac{\alpha^2}{2}\cos(2\pi\tau f_0)\,\text{sinc}(\pi\tau\Delta f)\,.$$

   <u>*Rappel*</u> : $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\left(\cos(p-q) + \cos(p+q)\right)$

5. Représenter graphiquement $R_x(\tau)$ (avec $f_0 \gg \Delta f$).

6. Calculer la densité spectrale de puissance de $x$, notée $S_x(\nu)$.
   <u>*Rappel*</u> : $F_0 \text{sinc}(\pi t F_0) \overset{TF}{\leftrightarrow} \mathbb{1}_{[-F_0/2;F_0/2]}(\nu)$

7. Représenter graphiquement $S_x(\nu)$.

8. Si l'on considère que ce signal aléatoire est un bruit, quel nom peut-on lui donner ?