Examen de Traitement du Signal - Juin 2004

1ère Année ISIMA

Durée : 2 heures.
Documents de cours autorisés. Calculatrice autorisée.
Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1

Un système est défini par l'équation différentielle suivante :

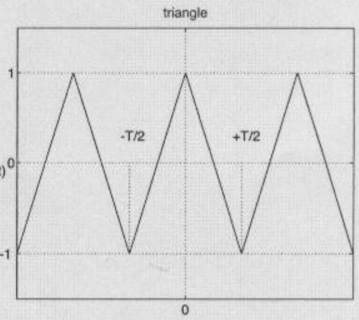
$$\frac{d^2y}{dt}(t) - 7\frac{dy}{dt}(t) - 10y(t) = 3x(t)$$

Les signaux d'entrée et de sortie sont respectivement $x(t)$ et $y(t)$.

1. Justifier sa caractérisation en tant que système linéaire invariant par translation continu.
2. Déterminer la fonction de transfert $H(f)$ du système (f désigne la fréquence).
   Remarque : on pourra travailler au choix avec $H(f)$ et f ou avec $H(\omega)$ et $\omega = 2\pi f$.
3. Calculer le module de $H(f)$ (ou $H(\omega)$ selon votre choix).
   Tracer l'allure de $|H(f)|$.
   De quel type de filtre s'agit-il ?
4. Déterminer la fréquence de coupure f_c (ou pulsation de coupure ω_c) à -3 dB du filtre.
   Rappel : $|H(f_c)| = \dfrac{max(|H(f)|)}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de comprendre sur un exemple simple les conséquences de l'opération d'échantillonnage sur un signal périodique (pouvant par exemple représenter une note jouée en continu par un instrument de musique). On s'intéresse au signal triangulaire périodique $x(t)$



dont le développement en série de Fourier est donné par :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2} \cos\left((2k+1)\pi\nu_o t\right)$$

où la fréquence fondamentale ν_o vaut 440 Hz.
Soit $y(t)$ le signal obtenu à partir de $x(t)$ après un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_1 = 3,5$ kHz. $k = 3$
Soit $z(t)$ le signal obtenu à partir de $x(t)$ après un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_2 = 2,5$ kHz. $k = 2$

1. Expliciter le développement de $y(t)$ et $z(t)$.
2. A l'écoute des signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ (en supposant qu'on dispose d'une chaîne Hi-Fi quasi parfaite), quelles différences perçoit-on entre les 3 signaux ? On s'appliquera à décrire aussi précisément que possible ces différences qualitatives en les justifiant.
3. On s'intéresse maintenant aux versions échantillonnées $y_e(t)$ (resp. $z_e(t)$) obtenues par échantillonnage idéal de $y(t)$ (resp. $z(t)$) pour différentes valeurs de la fréquence d'échantillonnage F_e. Soient $y_s(t)$ (resp. $z_s(t)$) les signaux obtenus à partir de $y_e(t)$ (resp. $z_e(t)$) par filtrage passe-bas à la fréquence $F_e/2$.
   On notera en majuscule les transformées de Fourier. <u>Ex. :</u> $x(t) \leftrightarrow X(\nu)$ où ν désigne la fréquence.
   (a) Rappeler la relation entre $y_e(t)$ (resp. $z_e(t)$) et $y(t)$ (resp. $z(t)$).
   (b) Donner l'expression de la transformée de Fourier $Y_e(\nu)$ de $y_e(t)$ en fonction de $Y(\nu)$ (resp. $Z_e(\nu)$ en fonction de $Z(\nu)$). Rappeler quelle propriété caractérise $Y_e(\nu)$ et $Z_e(\nu)$.
   (c) Pourquoi filtre-t-on $y_e(t)$ et $z_e(t)$ à la fréquence $F_e/2$?
   (d) Décrire et commenter l'origine des différences éventuelles entre $y_s(t)$ et $y(t)$ (resp. entre $z_s(t)$ et $z(t)$) lorsque :
   – $F_e = 7$ kHz,
   – $F_e = 5$ kHz,
   – $F_e = 3$ kHz.
   Indication : on pourra raisonner dans le domaine fréquentiel sans calculs détaillés, et s'appuyer sur des graphiques bien choisis.

4. Quelle opération doit-on effectuer avant l'échantillonnage du signal $x(t)$ à une fréquence F_e pour éviter l'apparition de termes parasites dans le signal $x_s(t)$ (défini de manière analogue à y_s et z_s), quelle que soit la fréquence d'échantillonnage F_e ?
Remarque : par "termes parasites" on entend composantes du signal qui ne sont pas présentes dans $x(t)$ mais qui pourraient apparaître dans $x_s(t)$.

Exercice 3 - **A rendre sur une copie séparée**

On considère les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ suivants :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0,\ 6], \\ 1 & \text{si } t \in [0,\ 4], \\ -1 & \text{si } t \in [4,\ 6]. \end{cases}$$

$$y(t) = \mathbb{I}_{[0,\ 1]}(t) \cdot \sin(2\pi f_1 t) \qquad (f_1 = 1\ Hz)$$

$$z(t) = y\left(\frac{t}{4}\right) = \mathbb{I}_{[0,\ 4]}(t) \cdot \sin(2\pi f_2 t) \qquad (f_2 = f_1/4 = 0,25\ Hz)$$

La fonction $\mathbb{I}_{[a,b]}(t)$ est la fonction porte sur l'intervalle $[a, b]$ qui vaut 1 sur $[a, b]$ et 0 en dehors.

1. (a) Représenter les signaux $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $y(t+1)$ et $z(t-2)$.
   (b) Déterminer leur transformée de Fourier.
2. Préciser si les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont à énergie ou puissance finie.
3. Calculer la fonction d'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$.
4. Tracer l'allure de la courbe définie par $\gamma_{xy}(\tau)$.
5. Que peut-on dire lorsque l'intercorrélation passe par
   - un maximum positif ?
   - un minimum négatif ?
6. Comment peut-on utiliser l'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$ pour localiser les discontinuités de $x(t)$?

Fin