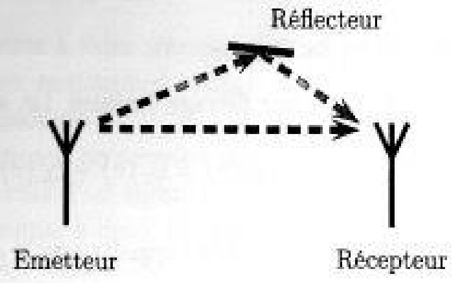
DM 3 (Exercice de l'examen de juin 2010)

Exercice Transmission en présence de trajets multiples

Lors d'une transmission par onde radio, il arrive souvent que le faisceau principal donne naissance à plusieurs faisceaux parasites secondaires. Les phénomèmes de réflexion atmosphérique, de diffraction et de réflexion sur le sol ou des obstacles expliquent l'existence de trajets multiples.



Le signal reçu se compose ainsi de plusieurs répliques de l'onde émise, plus ou moins retardées et atténuées les unes par rapport aux autres. On parle de **trajets multiples**. La superposition de ces ondes au niveau du récepteur va se traduire par des annulations du signal reçu. On parle d'évanouissement du signal dû à des interférences destructives.

Le but de cet exercice est de modéliser la relation entre le signal reçu $y(t)$ et le signal émis $x(t)$ dans le cas d'un seul trajet secondaire. Cette modélisation va nous permettre de caractériser le retard T et l'attenuation a subis par le signal sur le trajet secondaire. Cette étape est indispensable pour retrouver le signal original $x(t)$ seul en éliminant le signal secondaire.

1. Modélisation d'un trajet secondaire
   Soit le signal reçu $y(t)$ composé de la somme d'un signal $x(t) \in \mathbb{R}$ et d'un signal secondaire (écho) :
   $$y(t) = x(t) + ax(t-T)$$
   où $0 < a < 1$ et le retard $T > 0$.
   a) Montrer que $y(t)$ peut s'écrire comme la sortie d'un filtre linéaire d'entrée $x(t)$ sous la forme $y(t) = h * x(t)$. Préciser l'expression analytique de $h(t)$.
   b) Comment s'appelle cette fonction h ?
   c) Rappeler la relation entrée-sortie d'un filtre linéaire dans le domaine fréquentiel.
   d) Quelle est la réponse en fréquence de ce filtre, notée $H(\nu)$?
   e) Montrer que $|H(\nu)|^2 = (1+a^2)[1+\gamma\cos(2\pi\nu T)]$ en précisant l'expression de γ.
   f) Donner une représentation graphique de $|H(\nu)|^2$ pour $a = 0,5$. Préciser les valeurs minimale et maximale de cette fonction sur le graphique.

On souhaite travailler avec un outil nous permettant de bien distinguer le signal $x(t)$ d'une part et les caractéristiques du trajet secondaire $h(t)$ d'autre part. C'est ce qui motive l'introduction de la notion de **cepstre** (il n'y a pas de faute de frappe...) étudié dans la suite de cet exercice.

2. Analyse cepstrale d'un signal déterministe

   Le cepstre d'un signal réel à énergie finie $x(t)$ de transformée de Fourier $X(\nu)$ est défini par :

$$c_x(\tau) \overset{TF}{\leftrightarrow} \ln\left(|X(\nu)|^2\right)$$

   où TF représente la transformée de Fourier.

   a) Montrer que si $y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire, i.e. si $y(t) = h * x(t)$, on a :

$$c_y(\tau) = c_x(\tau) + c_h(\tau).$$

   b) On désire calculer le cepstre de $h(t)$. On rappelle que le développement limité de la fonction $\ln(1+u)$ valable pour $|u| < 1$ est :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \simeq u - \frac{u^2}{2}.$$

   i – Donner une approximation de $\ln\left[|H(\nu)|^2\right]$.

   ii – Donner l'expression de la transformée de Fourier inverse des signaux suivants :
   · $f(\tau) \overset{TF}{\leftrightarrow} e^{j2\pi\nu T}$;
   · $g(\tau) \overset{TF}{\leftrightarrow} \cos(2\pi\nu T)$.

   iii – Déterminer une approximation du cepstre de $h(t)$, noté $c_h(\tau)$.

   iv – Donner une représentation graphique de $c_h(\tau)$.

   c) Considérons un signal $x(t)$ dont le cepstre $c_x(\tau)$ a un support inclu dans $]-T;T[$. Expliquer comment identifier le retard T et l'atténuation a à l'aide du cepstre du signal $y(t)$.

   d) Proposer un traitement afin de retrouver le signal original $x(t)$ à partir du signal $y(t)$.

3. Analyse cepstrale d'un signal aléatoire

   Nous allons aborder le même problème en utilisant les outils des signaux aléatoires.
   Le cepstre d'un signal aléatoire réel stationnaire $x(t,\omega)$ de densité de puissance $S_x(\nu)$ est défini par :

$$c_x(\tau) \overset{TF}{\leftrightarrow} \ln(S_x(\nu)).$$

   On considère un signal aléatoire stationnaire modélisé par la somme d'un signal aléatoire stationnaire $x(t,\omega)$ et d'un écho défini par :

$$y(t,\omega) = x(t,\omega) + ax(t-T,\omega),$$

   où ω représente l'aléa, avec $0 < a < 1$ et le retard $T > 0$.

   a) Déterminer la fonction d'autocorrélation statistique de y, notée $R_y(\tau)$, en fonction de R_x.

   b) Quelle est la relation entre la fonction d'autocorrélation statistique et la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire stationnaire ?

   c) Déterminer la densité spectrale de puissance de y, notée $S_y(\nu)$.

   d) Montrer que $S_y(\nu) = |H(\nu)|^2 S_x(\nu)$

   e) Calculez le cepstre de y, noté $c_y(\tau)$ en fonction de $c_x(\tau)$ et $c_h(\tau)$.