Examen de Traitement du Signal - 23 Mai 2011

1ère Année ISIMA

Durée : 2 heures. Le sujet comporte 3 pages.
1 page A4 recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrice non autorisée.

Problème : Transmission numérique de médias sonores

La *transmission numérique* consiste à faire transiter les informations sur le support physique de communication sous forme de signaux numériques. Ainsi, des données analogiques devront préalablement être *numérisées* avant d'être transmises.
Toutefois, les informations numériques ne peuvent pas circuler sous forme de "0" et de "1" directement, il s'agit donc de les coder sous forme d'un signal possédant deux états. Cette transformation de l'information binaire sous forme d'un signal à deux états est réalisée par le *codeur bande de base*.
Enfin, pour la propagation dans l'espace libre, l'information est transmise par des ondes de nature adaptée à l'espace (ondes électromagnétiques dans l'air et le vide et ondes acoustiques dans l'eau par exemple). Le signal émis prend généralement la forme d'une sinusoïde, dont l'amplitude, la fréquence ou la phase code l'information : *modulation par onde porteuse*.
Dans ce problème nous allons aborder, de façon simple, la **transmission numérique d'un son stéréophonique.**

Les 3 parties peuvent être traitées de façon indépendante.
Le barème est donné à titre indicatif.

Partie I — Multiplexage fréquentiel et échantillonnage de l'information analogique (9 pts)

Afin de coder l'information stéréophonique (c'est-à-dire deux signaux gauche et droite dans un seul signal) on utilise le multiplexage fréquentiel (partage du canal). Cette technique permet, entre autre, d'assurer la compatibilité avec les systèmes monophoniques. On définit donc le signal composite stéréophonique, noté $c(t)$, par la relation :

$$c(t) = [g(t) + d(t)] + \cos(2\pi\nu_0 t) + [g(t) - d(t)]\cos(2\pi 2\nu_0 t),$$

où, $g(t)$ et $d(t)$ sont les signaux où sont enregistrés les canaux gauche et droit de l'information sonore et $\nu_0 = 19\ kHz$.

1. Filtrage (2 pts) : Les signaux $g(t)$ et $d(t)$ ont été préalablement filtrés, c'est-à-dire :

$$g(t) = h * g_0(t) \quad \text{et} \quad d(t) = h * d_0(t),$$

où, $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre dont la réponse en fréquence $H(\nu) = \mathbf{I}_{[-B;B]}(\nu)$ avec $B = 15\ kHz$.

   a) Rappeler la relation entrée-sortie d'un filtre linéaire dans le domaine fréquentiel.

   b) Quelle est la relation entre $h(t)$ et $H(\nu)$?

   c) Calculer h(t).

   d) Est-ce que les signaux $g(t)$ et $d(t)$ sont à bande limitée ? (*vous justifierez votre réponse*)

2. Echantillonnage (3 pts) : On souhaite maintenant échantillonner le signal $c(t)$ à la fréquence d'échantillonnage F_e.

   a) Rappeler le théorème de Shannon.

   b) Calculer la transformée de Fourier du signal $c(t)$, que l'on notera $C(\nu)$. (on notera $G(\nu)$ et $D(\nu)$ les transformées de Fourier des signaux $g(t)$ et $d(t)$)

c) Tracer l'allure de $C(\nu)$ pour $\nu \in [-60, 60]$ kHz. (on utilisera des allures arbitraires pour représenter $G(\nu) + D(\nu)$ et $G(\nu) - D(\nu)$)

d) Le signal $c(t)$ est-il à bande limitée ?

e) Quelle est la contrainte à appliquer sur F_e afin de respecter le théorème de Shannon.

3. Décodage du signal composite par sous-échantillonnage. (4 pts)

a) Si on échantillonne $c(t)$ à la fréquence $F_e = 2\nu_0 = \frac{2}{T_0}$, comment s'appelle le phénomène observé ?

b) Calculer les échantillons de $c(t)$ aux instants $\{n\frac{T_0}{2}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire $c[n\frac{T_0}{2}]$. Est-on capable de reconstruire $g(t)$? *(vous justifierez votre réponse)*

c) Calculer les échantillons de $c(t)$ aux instants $\{(n+0,5)\,\frac{T_0}{2}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire $c[(n+0,5)\,\frac{T_0}{2}]$. Est-on capable de reconstruire $d(t)$? *(vous justifierez votre réponse)*

d) Montrer, cette fois-ci en vous aidant du domaine fréquentiel, qu'en sous-échantillonnant $c(t)$ on peut décoder le signal composite et ainsi retrouver les signaux $g(t)$ et $d(t)$.

Partie II — Transmission en bande de base : Codes en ligne (6 pts)

Dans le mode de transmission en bande de base, adapté aux cables métalliques, chaque mot binaire est transmis sous forme d'un niveau de tension ou d'une variation simple de niveau de tension. Cette opération s'appelle le codage en ligne.
On souhaite envoyer une suite de bits $\alpha = \{\alpha_m\}$ issue de l'échantillonnage d'un signal analogique, à une période T. Pour ce faire on associe aux valeurs aléatoires binaires "0" ou "1" (c'est-à-dire les α_m) des signaux analogiques élémentaires notés $s_0(t)$ et $s_1(t)$. De façon générale, lorsqu'il y a indépendance entre les différents signaux, il est possible d'écrire le signal aléatoire analogique représentant la suite de bits par l'expression suivante :

$$s(t,\omega) = \sum_m [\alpha_m s_1(t) + (1-\alpha_m)\, s_0(t)] * \delta(t - mT)$$

C'est ce qu'on appelle un *code en ligne*. On peut montrer que la densité spectrale de puissance (DSP) d'un tel signal s'exprime sous une forme générale dite *formule de Bennett* :

$$S_s(\nu) = p_0 p_1 \frac{1}{T} |S_0(\nu) - S_1(\nu)|^2 + \frac{1}{T^2} |p_0 S_0(\nu) + p_1 S_1(\nu)|^2 \sum_m \delta\left(\nu - \frac{m}{T}\right),$$

où, $S_0(\nu)$ et $S_1(\nu)$ sont les transformées de Fourier de $s_0(t)$ et $s_1(t)$, p_0 et p_1 sont les probabilités d'apparition des "0" et des "1" binaires et T est la période des symboles émis. On considère le cas où $p_0 = p_1 = 1/2$.
Nous allons étudier le code en ligne dit biphase ou encore appelé code Manchester. Il est définit par $s_0(t) = -V/2$ pour $t \in [0, T/2]$, $s_0(t) = +V/2$ pour $t \in [T/2, T]$ et $s_1(t) = -s_0(t)$.

1. Tracer une réalisation du processus aléatoire $s(t,\omega)$.

2. Calculer $S_0(\nu)$ et $S_1(\nu)$.

3. Calculer la DSP du code Manchester.
Indication : $e^{ja} - e^{jb} = e^{j(a+b)/2}\left(e^{j(a-b)/2} - e^{-j(a-b)/2}\right) = 2je^{j(a+b)/2}\sin((a-b)/2)$

4. Donner l'allure graphique de cette DSP.

5. On définit la bande fréquentielle occupée par ce signal par la position du premier passage à zéro (pour $\nu > 0$) de leur DSP. Déterminer la bande fréquentielle du processus aléatoire $s(t,\omega)$.

Partie III — Transmission sur onde porteuse : Modulation (5 pts)

Les densités spectrales de puissance des signaux de communication vus jusqu'à présent (codes en ligne) sont concentrées dans les basses fréquences. Or les contraintes du canal radio imposent d'utiliser des ondes à des fréquences élevées. La transmission directe de codes en ligne sous forme d'onde radio n'est donc pas possible, c'est pourquoi l'information doit être transmise par modulation d'une sinusoïdale à la fréquence désirée ν_1, appelée *porteuse*.
Soit le processus aléatoire $y(t,\omega) = s(t,\omega)cos(2\pi\nu_1 t + \varphi(\omega))$. Le processus aléatoire stationnaire $s(t,\omega)$ représente l'information à transmettre (code en ligne). Il est caractérisé par sa moyenne statistique m_s et son autocorrélation statistique $R_s(\tau)$. La variable aléatoire $\varphi(\omega)$ est uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$.

1. Représenter graphiquement la fonction densité de probabilité de la variable φ.
2. Calculer la fonction d'espérance m_y et l'autocorrélation statistique $R_y(\tau)$ de $y(t,\omega)$.
3. Calculer la densité spectrale de puissance de $y(t,\omega)$ notée $S_y(\nu)$. Représenter l'allure graphique de $S_y(\nu)$ en considérant que la densité spectrale de puissance de $s(t,\omega)$ a une allure arbitraire et que $s(t,\omega)$ est à bande limitée.