# Examen de Traitement du Signal - 04 Juin 2012

## 1ère Année ISIMA

**Durée : 2 heures. Le sujet comporte 3 pages.**
**1 page A4 recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrice non autorisée.**

## Exercice : 1 Questions préliminaires

1. Rappeler l'expression de la transformée de Fourier d'une fonction porte centrée en zéro et de largeur $T$ dans le domaine temporel. Donner son allure graphique, en repérant bien les points d'annulation.

2. Rappeler les représentations temporelle et fréquentielle d'une translation en temps d'une part et d'une translation en fréquence d'autre part.

3. L'opération d'échantillonnage idéal à la fréquence $F_e = 1/T_e$ s'écrit à l'aide de l'opérateur $\text{III}_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT_e}(t)$. Comment s'appelle cette distribution ? Rappeler quelle est sa transformée de Fourier.

## Exercice : 2 Densité spectrale de puissance de codes de lignes

Dans le mode de transmission en bande de base, adapté aux câbles métalliques, chaque mot binaire est transmis sous forme d'un niveau de tension ou d'une variation simple de niveau de tension. Cette opération s'appelle le codage en ligne.
On souhaite envoyer une suite de bits $\alpha(\omega) = \{\alpha_m(\omega)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ issue de l'échantillonnage d'un signal analogique, à une période $T$ (ici $\omega$ représente l'aléa). Pour ce faire on associe aux valeurs aléatoires binaires "0" ou "1" (c'est-à-dire les $\alpha_m(\omega)$) des signaux analogiques élémentaires notés $s_0(t)$ et $s_1(t)$. De façon générale, lorsqu'il y a indépendance entre les différents signaux, il est possible d'écrire le signal aléatoire analogique représentant la suite de bits par l'expression suivante :

$$s(t,\omega) = \sum_m \left[\alpha_m(\omega)s_1(t) + (1-\alpha_m(\omega))\, s_0(t)\right] * \delta\left(t - mT\right)$$

C'est ce qu'on appelle un *code en ligne*. On peut montrer que la densité spectrale de puissance (DSP) d'un tel signal s'exprime sous une forme générale dite *formule de Bennett* :

$$S_s(\nu) = p_0 p_1 \frac{1}{T}\left|S_0(\nu) - S_1(\nu)\right|^2 + \frac{1}{T^2}\left|p_0 S_0(\nu) + p_1 S_1(\nu)\right|^2 \sum_m \delta\left(\nu - \frac{m}{T}\right),$$

où, $S_0(\nu)$ et $S_1(\nu)$ sont les transformées de Fourier de $s_0(t)$ et $s_1(t)$, $p_0$ et $p_1$ sont les probabilités d'apparition des "0" et des "1" binaires et $T$ est la période des symboles émis. On considère le cas où $p_0 = p_1 = 1/2$.
Nous allons étudier deux codes de ligne :
- NRZ polaire : $s_0(t) = -V$ pour $t \in [0,T]$ et $s_1(t) = V$ pour $t \in [0,T]$ $(V > 0)$ ;
- Manchester : $s_0(t) = -V/2$ pour $t \in [0, T/2]$, $s_0(t) = +V/2$ pour $t \in [T/2, T]$ et $s_1(t) = -s_0(t)$.

1. Tracer une réalisation du processus aléatoire $s(t,\omega)$ dans le cas du NRZ polaire ET dans le cas du Manchester.

2. Calculer la DSP du code NRZ polaire.

3. Calculer la DSP du code Manchester.
   *Indication :* $e^{ja} - e^{jb} = e^{j(a+b)/2}\left(e^{j(a-b)/2} - e^{-j(a-b)/2}\right) = 2je^{j(a+b)/2}\sin\left((a-b)/2\right)$

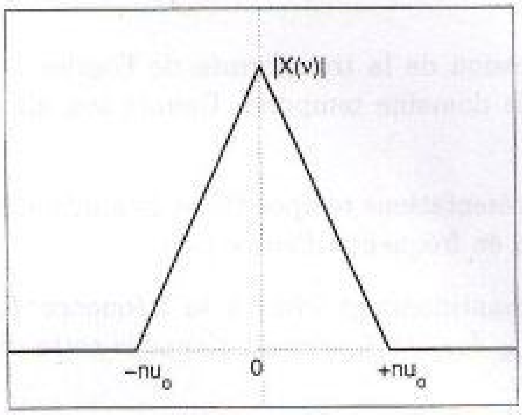
4. Donner l'allure graphique des DSP de ces deux signaux.

5. On définit usuellement la bande fréquentielle occupée par chaque signal par la position du premier passage à zéro (pour $\nu > 0$) de leur DSP. Déterminer les bandes des deux signaux précédents.

## Exercice : 3 Propriétés d'un échantillonneur bloqueur

On suppose le critère de Shannon respecté tout au long de l'exercice.

1. On s'intéresse à l'échantillonnage à la fréquence $F_e$ d'un signal $x(t)$ à bande limitée dans $[-\nu_o, \nu_o]$. On note $\{x[n], n \in \mathbb{N}\}$ les échantillons de $x(t)$. On désigne par $X(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$. $|X(\nu)|$ est décrit sur la figure ci-dessous.




Soit $x_1(t)$ le signal issu de l'échantillonnage idéal de $x(t)$ :

$$x_1(t) = \text{III}_{T_e}(t) \cdot x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, \delta_{nT_e}(t).$$

a) Donner l'expression de sa transformée de Fourier et décrire son allure graphique.

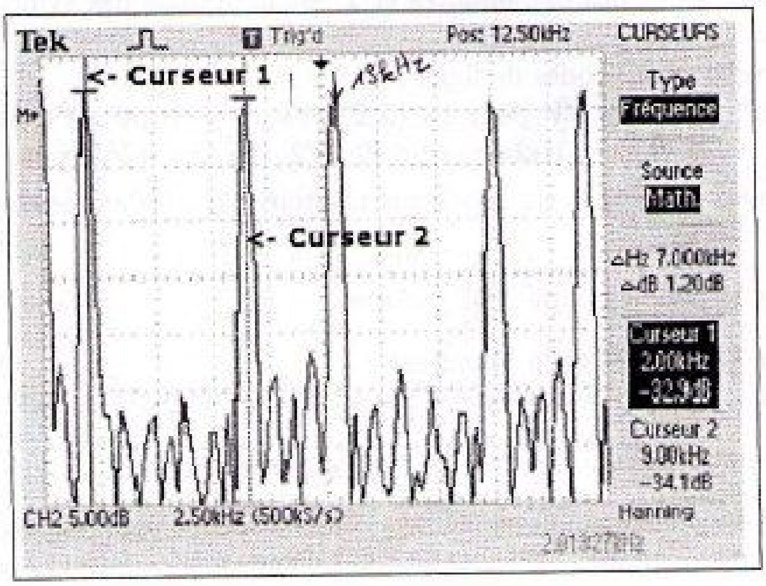
2. L'échantillonnage idéal n'étant pas matériellement réalisable, on met souvent en oeuvre un *échantillonneur-bloqueur*. Soit $\tau$, $0 < \tau < T_e$, et $b_\tau(t) = \mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)$ (fonction qui vaut 1 sur $[0, \tau]$ et 0 en dehors). Le signal échantillonné-bloqué issu de $x(t)$ est décrit par :

$$x_2(t) = (\text{III}_{T_e} \cdot x) * b_\tau(t)$$

a) Décrire l'allure graphique de $x_2(t)$ associé à $x(t)$.

b) Donner l'expression de la transformée de Fourier $X_2(\nu)$ de $x_2(t)$.

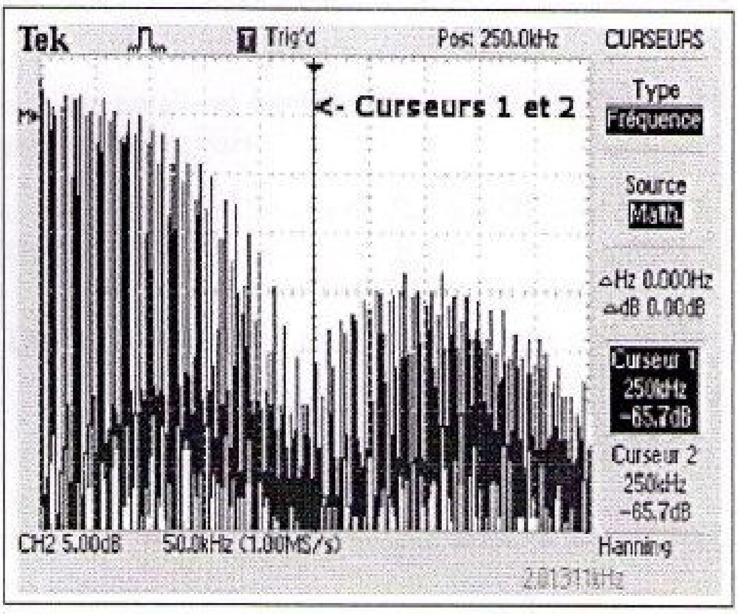
3. $x(t)$ est désormais un signal sinusoïdal pur. Après passage par un échantillonneur idéal, on obtient un signal à temps discret. On visualise le contenu spectral de ce signal échantillonné à l'aide d'un analyseur de spectre sur la figure ci-dessous (fréquences positives uniquement, 1 carreau = 2,50 kHz).



a) Quelle est la fréquence de cette sinusoïde ? (justifier)

b) Quelle est la fréquence d'échantillonnage de l'échantillonneur utilisé ? (justifier)

4. En pratique, on ne dispose pas d'un échantillonneur idéal mais d'un échantillonneur bloqueur. La figure ci-dessous représente le spectre du signal échantillonné-bloqué issu de $x(t)$ dans une très large bande de fréquences entre 0 et 500 kHz. Commenter ce graphique et en déduire la durée caractéristique $\tau$ du bloqueur $b_\tau(t)$ défini plus haut.




5. La figure ci-dessous montre un échantillon (bloqué) dans le domaine temporel (on a isolé un intervalle de temps de longueur inférieure à la période d'échantillonnage $T_e$). Commenter ce graphique et faire le lien avec les résultats des questions précédentes.