I Un problème variationnel

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le problème est :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ (2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y})n_1 + (-\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y})n_2 = g \quad \text{sur } \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{I.1}$$

On supposera $f \in L^2(\Omega)$, et notant $\gamma_1 : H^2(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ la deuxième application trace, on supposera $g \in \gamma_1(H^2(\Omega))$.

On a posé $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$ où $\Gamma_0 \bigcap \Gamma_1 = \emptyset$ (partition de Γ).

Faire un dessin.

On notera $V = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ v_{|\Gamma_0} = 0\}$.

1 On suppose $\Gamma = \Gamma_0$.

Comment est appelé V dans ce cas ? Choisir une norme usuelle sur V qui en fait en espace de Hilbert.

Montrer que le problème (I.1) est bien posé. Pour cela :

1. réécire le problème fort en introduisant une matrice A, i.e. l'écrire sous la forme $-\mathrm{div}(A.\vec{\mathrm{grad}}u)+ ... = ...$; dans la suite on pourra noter $\vec{X} = A.\vec{\mathrm{grad}}u$ (intermédiaire de calcul),
2. donner la formulation faible (variationnelle) associée,
3. préciser le type des conditions aux limites,
4. montrer l'équivalence problème fort - problème faible,
5. rappeler le théorème de Poincaré,
6. rappeler le théorème de Lax-Milgram et l'appliquer : on commencera par écrire les définitions de continuités et de coercivité.
7. expliciter le terme "bien posé", et conclure.

2 On suppose meas$(\Gamma_0) \neq 0$ et meas$(\Gamma_1) \neq 0$

2.1 Équivalence de normes

Vérifier que la semi-norme sur $H^1(\Omega)$ définie pour $v \in V$ par :

$$|v|_V = ||\mathrm{grad} v||_{L^2(\Omega)} \tag{I.2}$$

est une norme sur V. On admettra alors que, dès que meas$(\Gamma_0) \neq 0$ (la mesure de Γ_0) est non nulle, la norme de $H^1_0(\Omega)$ est une norme équivalente à la norme $H^1(\Omega)$ sur l'espace V. En particulier on notera c_1 la constante :

$$\forall v \in V, \quad ||v||_{H^1(\Omega)} \leq c_1 |v|_V. \tag{I.3}$$

On munira V de cette norme.

2.2 Montrer que le problème est bien posé dans V

Écrire proprement la formulation variationnelle du problème. Expliquer pourquoi l'espace de Hilbert à considérer est V. Puis appliquer le théorème de Lax–Milgram.

II Exercice

Dans $[0,1]$, on considère $\displaystyle\bigcup_{i=1,n} [x_{i-1}, x_i]$ où $x_0 = 0$, $x_n = 1$ et $x_{i-1} < x_i$ pour tout $i = 1, ..., n$. On définit l'espace P_3 comme étant l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ qui sont des polynômes de degré 3 sur chaque $[x_{i-1}, x_i]$ (pour $i = 1, ..., n$). Construire une base simple de P_3.

Déterminerer des points intermédiaires $x_{i+\frac{1}{3}}$ et $x_{i+\frac{2}{3}}$ et les fonctions de base associées (valant 1 en un point et 0 aux autres points).