Élèves de deuxième année ISIMA, filière 4 (option mathématiques appliquées et modélisation), cours d'Equations aux Dérivées Partielles, contrôle du vendredi 9/12/2005

I Un problème variationnel

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ. On se donne une fonction $f \in L^2(\Omega)$ et une fonction $g \in L^2(\Gamma)$.

1 Première question

Le problème est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ -5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ (A.\vec{\text{grad}}u).\vec{n} + u = g \quad \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{I.1}$$

où V un espace vectoriel à déterminer, A est une matrice à déterminer, et $\vec{n}(\vec{x})$ est le vecteur normal unitaire sortant à Γ au point $\vec{x} \in \Gamma$, et $\lambda > 0$.

Montrer que le problème (I.1) est bien posé dans un espace V à déterminer. Pour cela :

1. réécire le problème fort sous la forme $-\text{div}(A.\vec{\text{grad}}u) + \lambda u = f$ où A est une matrice à déterminer,
2. donner la formulation faible (ou variationnelle) formelle associée.
3. Donner la formulation faible rigoureuse associée : que vaut V ? Quel produit scalaire choisissez-vous sur V ?
4. Préciser le type des conditions aux limites (essentielles ou naturelles ?).
5. Montrer l'équivalence problème fort - problème faible.
6. Rappeler le théorème de Lax-Milgram, et rappeler le théorème de trace.
7. Montrer que la forme bilinéaire définie sur $H^1(\Omega)$ par :

$$a(u,v) = (A.\vec{\text{grad}}u, \vec{\text{grad}}v)_{L^2(\Omega)} + \lambda(u,v)_{L^2(\Omega)} + (u,v)_{L^2(\Gamma)}$$

   est coercitive et continue (écrire les définitions pour ces termes). Puis montrer que la forme linéaire du problème est continue. Donner la meilleure constante de continuité et la meilleure constante de coercitivité de la forme bilinéaire.
8. Expliciter le terme 'bien posé' et conclure.

2 Seconde question

On reprend le problème (I.1), mais on prend $\lambda = 0$ et on change la condition aux limites : on prend ici, au lieu de $(\text{I.1})_2$:

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

1- Rappeler le théorème de Poincaré.

2- Le problème est-il bien posé, et si oui dans quel espace ? Reprendre les questions 2, 4, 7 précédentes en prenant la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ correspondant à ce nouveau problème.

II Élements finis P_2

1. Rappeler la définition d'un élément fini.
2. Dessiner un triangle quelconque de sommet $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$ et les droites de coordonnées barycentrique $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ dont on se servira pour la question suivante, puis les droites $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ et $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$.
3. Dessiner un élément fini P_2, et donner ses fonctions de base en fonction des coordonnées barycentriques (une telle fonction s'annule sur les droites correspondant à certaines coordonnées barycentriques).
4. Rappeller la relation matricielle entre les coordonnées usuelles est les coordonnées barycentriques. Prendre l'élément fini P_2 de référence (géométrie=simplexe de référence), et donner ses fonctions de base en coordonnées cartésiennes.